Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт радиоэлектроники
и информационных
технологий — РТФ

Е. А. ГОЛИКОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Е. А. Голикова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета для студентов вуза,
обучающихся по направлениям подготовки
09.03.01 — Информатика и вычислительная техника,
09.03.03 — Прикладная информатика,
09.03.04 — Программная инженерия,
11.03.01 — Радиотехника, 11.03.02 — Информационные
технологии и системы связи,
11.03.03 — Конструирование и технология электронных средств,
27.03.04 — Управление в технологических системах

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2021

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
Г60

Р е ц е н з е н т ы:
завотделом алгебры и топологии ИММ УрО РАН канд. физ.-мат. наук, доц. *И. Н. Белоусов*;
канд. пед. наук, доц. кафедры высшей математики *О. В. Куликова* (Уральский государственный университет путей сообщения)

Н а у ч н ы й р е д а к т о р — канд. физ.-мат. наук, доц. *Н. В. Чуксина*

Голикова, Е. А.
Г60 Линейная алгебра : учебное пособие / Е. А. Голикова ; М-во науки и высш. обр. РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2021. — 104 с.
ISBN 978-5-7996-3193-2

Учебное пособие подготовлено на основе лекций и практических занятий по части «Линейная алгебра» дисциплины «Математика» для студентов всех специальностей Института радиотехники и информационных технологий. В каждом разделе пособия приведены формулировки необходимых определений и теорем, а также разобраны основные типы задач. Каждая глава заканчивается подборкой вопросов для самоконтроля.

Библиогр.: 11 назв. Рис. 6.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-7996-3193-2

Список обозначений

$x \in A$ – x является элементом множества A

$x \notin A$ – x не является элементом множества A

$A \subseteq B$ – A подмножество множества B

$A \setminus B = \{x | x \in A \ \& \ x \notin B\}$ – разность множеств A и B

$\overline{A}$ (или $\neg A$)– высказывание «не A»

$A \wedge B$ (или $A \& B$) – высказывание «A и B»

$A \vee B$ – высказывание «A или B»

$A \Rightarrow B$ – высказывание «если A, то B»

$A \Leftrightarrow B$ – высказывание «A равносильно B»

$\forall A$ – высказывание «для любого A»

$\exists A$ – высказывание «существует A»

$\mathrm{Rg}(A)$ – ранг матрицы A

$\overline{X}$ – операция покомпонентного комплексного сопряжения матрицы X

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ – диагональная матрица

ВВЕДЕНИЕ

В университетском курсе алгебры изучаются различные алгебраические структуры (точнее, *алгебры*). Как правило, это аксиоматически определяемые объекты, т. е. множества с определенными свойствами. При этом природа элементов множества-носителя не имеет значения. Например, мы можем рассмотреть в качестве основного множества (носителя) — действительные числа вместе с операцией сложения этих чисел. Но можем рассмотреть в качестве носителя — множество действительных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, вместе с операцией их сложения. Понятно, что свойства операции сложения как чисел, так и функций одинаковы. Это перестановочность (коммутативность), сочетательный закон (ассоциативность), наличие специального элемента, играющего роль нуля (число 0 или тождественно нулевая функция) и т. д. Таким образом, можно заметить, что природа элементов носителя не влияет на свойства операции сложения в приведенном примере. С точки зрения алгебры, сложение на множестве действительных чисел порождает ту же алгебраическую структуру, что и сложение на множестве действительных функций (это — *группа*). Алгебра абстрактно изучает аксиоматические структуры, а точнее, свойства операций на произвольных множествах.

Во введении мы более четко определим упомянутые понятия, такие как операция, свойства операций, алгебра. Будут приведены аксиоматические определения некоторых алгебраических структур (полугруппа, группа, поле). Основные разделы посвящены теории линейных пространств (частный, но важный пример алгебраической структуры). Выводы этой теории широко применяются в самых разных разделах математики: теория дифференциальных уравнений, теория рядов, уравнения математической физики и т. д.

Определение В1. Алгебраической операцией *n-местной или n-арной на непустом множестве A называется функция n переменных, определенная на A.*

Пример. 1. Бинарная операция сложения целых чисел отображает $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, она *паре* целых чисел a, b ставит в соответствие целое число $a + b$.

2. Унарная операция обращения целых чисел отображает $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, она *одному* целому числу a ставит в соответствие целое число $-a$.

3. Особую роль играют 0-арные операции, то есть константы. Например, числа 1 и 0 играют особую роль в теории целых чисел, их можно рассматривать как значения соответствующих 0-арных операций.

Определение В2. Алгеброй (универсальной алгеброй) *называется упорядоченная пара* $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$, *где* A *– некоторое непустое множество, называемое* **носителем** *алгебры* $\mathcal{A}$, *и* $\mathcal{F}$ *– множество операций, определенных на* A, *называемое* **сигнатурой** *алгебры* $\mathcal{A}$.

Ниже в табличной форме собраны примеры алгебр с соответствующими наборами операций. Во втором столбце черта «$|$» отделяет операции. Например, «$+ \mid 0$» означает, что на данном носителе определена бинарная операция $+$ и 0-арная операция 0. Далее табличную форму постепенно заполним.

Носитель	Сигнатура (операции)	Свойства операций	Тип алгебры
$\mathbb{N}$	$+$		
$\mathbb{N}$	$\cdot \mid 1$		
$\mathbb{Z}$	$+ \mid 0$		
$\mathbb{Z}$	$+ \mid 0 \mid \cdot \mid 1$		
$\mathbb{R}$	$+ \mid 0 \mid \cdot \mid 1$		
$\mathbb{C}$	$+ \mid 0 \mid \cdot \mid 1$		
$M_{2\times 2}$	$+ \mid 0_{2\times 2} \mid \cdot \mid E_{2\times 2}$		

Пусть $*$ и $\circ$ — бинарные операции из множества $\mathcal{F}$ алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F} \rangle$ и $a, b, c \in A$. Отметим некоторые часто встречающиеся свойства *бинарных* операций.

1. Ассоциативность $*$: $\forall a, b, c \in A \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.

2. Коммутативность $*$: $\forall a, b, \in A \quad a * b = b * a$.

3. Дистрибутивность $\circ$ *относительно* $*$ *слева:*
$\forall a, b, c \in A \quad a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$.

4. Дистрибутивность $\circ$ *относительно* $*$ *справа:*
$\forall a, b, c \in A \quad (a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$.

Важное свойство *0-арной* операции e — быть нейтральным (нулевым, единичным) элементом для бинарной операции $*$ запишем под номером 5.

5. $\exists e \in A$: $\forall x \in A \ x * e = e * x = x$.

Отметим также под номером 6 *унарную* операцию обращения для бинарной операции $*$ с нейтральным (нулевым, единичным) элементом e.

6. $\forall x \in A \ \exists \tilde{x} : \ x * \tilde{x} = \tilde{x} * x = e$.

Продолжая заполнять форму, перечислим по номерам те свойства операций, которые выполняются в данной алгебре. При этом отмечен тот единичный элемент e в данном носителе, для которого выполняется свойство 5 (например, $e = 0,5$). Заметим, что здесь также использованы стандартные обозначения из алгебры матриц: $E_{2\times 2}$ — единичная матрица размерности 2×2; $0_{2\times 2}$ — нулевая матрица размерности 2×2.

Носитель	Сигнатура (операции)	Свойства операций	Тип алгебры
$\mathbb{N}$	$+$	$1,2$	
$\mathbb{N}$	$\cdot \mid 1$	$1,2,e=1,5$	
$\mathbb{Z}$	$+ \mid 0 \mid -a$	$1,2,e=0,5,6$	
$\mathbb{Z}$	$+ \mid 0 \mid -a$	$1,2,e=0,5,6$	
	$\cdot \mid 1$	$1,2,e=1,5$	
	$+ \mid \cdot$	$3,4$	
$\mathbb{R}$	$+ \mid 0 \mid -a$	$1,2,e=0,5,6$	
	$\cdot \mid 1 \mid a^{-1}$	$1,2,e=1,5,6$	
	$+ \mid \cdot$	$3,4$	
$\mathbb{C}$	$+ \mid 0 \mid a$	$1,2,e=0,\ 5,6$	
	$\cdot \mid 1 \mid a^{-1}$	$1,2,e=1,\ 5,6$	
	$+ \mid \cdot$	$3,4$	
$M_{2\times 2}$	$+ \mid 0_{2\times 2} \mid -A$	$1,2,e=0_{2\times 2},\ 5,6$	
	$\cdot \mid E_{2\times 2}$	$2,e=E_{2\times 2},5$	
	$+ \mid \cdot$	$3,4$	

Различные типы алгебр определяются набором операций и их свойств (другими словами – аксиомами). Приведем определения некоторых алгебр.

Определение В3. *Пусть A – некоторое непустое множество, $*$ – бинарная операция, определенная на этом множестве. Алгебра $\langle A, \{*\}\rangle$ называется* **полугруппой**, *если операция является ассоциативной:*
$\forall x,y,z \in A \ \ (x*y)*z = x*(y*z)$.

Определение В4. *Пусть A – некоторое непустое множество, $*$ – бинарная операция, определенная на этом множестве, e – 0-местная операция на A, то есть e – некоторый элемент из A, называемый* **нейтральным (единичным)**. *Алгебра $\langle A, \{*, e\}\rangle$ называется* **группой**, *если выполняются следующие утверждения (аксиомы группы):*
1) $\forall x,y,z \in A \ \ (x*y)*z = x*(y*z)$ *– аксиома ассоциативности;*
2) $\forall x \in A \ x*e = e*x = x$ *– аксиома существования нейтрального элемента;*
3) $\forall x \in A \ \exists \tilde{x} : \ x*\tilde{x} = \tilde{x}*x = e$ *– аксиома существования обратного элемента.*

Определение В5. *Группа называется* **абелевой**, *если в ней выполняется аксиома коммутативности.*

Выделим по свойствам операций в заполняемой таблице с примерами, группы и полугруппы.

Таблица В1

Носитель	Сигнатура (операции)	Свойства операций	Тип алгебры
$\mathbb{N}$	$+$	$1,2$	полугруппа
$\mathbb{N}$	$\cdot \mid 1$	$1,2,e=1,5$	полугруппа
$\mathbb{Z}$	$+ \mid 0 \mid -a$	$1,2,e=0,5,6$	группа
$\mathbb{Z}$	$+ \mid 0 \mid -a$ $\cdot \mid 1$	$1,2,e=0,\ 5,6$ $1,e=1,5$ $3,4$	$\langle\mathbb{Z},+\rangle$– группа $\langle\mathbb{Z},\cdot\rangle$– полугруппа
$\mathbb{R}$	$+ \mid 0 \mid -a$ $\cdot \mid 1 \mid a^{-1}$	$1,2,e=0,\ 5,6$ $1,2,e=1,\ 5,6$ $3,4$	$\langle\mathbb{R},+\rangle$– группа $\langle\mathbb{R},\cdot\rangle$– группа
$\mathbb{C}$	$+ \mid 0 \mid -a$ $\cdot \mid 1 \mid a^{-1}$	$1,2,e=0,5,6$ $1,2,e=1,5,6$ $3,4$	$\langle\mathbb{C},+\rangle$– группа $\langle\mathbb{C},\cdot\rangle$– группа
$M_{2\times2}$	$+ \mid 0_{2\times2} \mid -A$ $\cdot \mid E_{2\times2}$	$1,2,e=0_{2\times2},\ 5,6$ $2,e=E_{2\times2},\ 5$ $3,4$	$\langle M_{2\times2},+\rangle$– группа $\langle M_{2\times2},\cdot\rangle$– полугруппа

В приведенной табл. В1 на всех носителях определены две бинарные операции, но они удовлетворяют разным наборам свойств (аксиом). Соответственно формируются различные алгебры. Далее рассмотрим определения кольца и поля — алгебр с двумя бинарными операциями.

Определение В6. *Пусть A — непустое множество, $+,\cdot$ — операции на множестве A и $\mathbf{0}$ — элемент множества A. Алгебра $\langle A,\{+,\cdot,\mathbf{0}\}\rangle$ называется* **кольцом** *тогда и только тогда, когда выполняются следующие утверждения (аксиомы кольца):*

1) $\langle A,\{+,\mathbf{0}\}\rangle$ — абелева (коммутативная) группа;

2) $\langle A\backslash\{\mathbf{0}\},\{\cdot\}\rangle$ — полугруппа;

3) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ и $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ — дистрибутивность.

При этом группа $\langle A,\{+,\mathbf{0}\}\rangle$ называется **аддитивной группой кольца.** *$\langle A\backslash\{\mathbf{0}\},\{\cdot\}\rangle$ называется* **мультипликативной группой кольца**.

Определение В7. *Пусть A — непустое множество, $+,\cdot$ — операции на множестве A и $\mathbf{0},\mathbf{1}$ — элементы множества A. Алгебра $\langle A,\{+,\cdot,\mathbf{0},\mathbf{1}\}\rangle$ называется* **полем** *тогда и только тогда, когда выполняются следующие утверждения (аксиомы поля):*

1) $\langle A, \{+, \mathbf{0}\}\rangle$ *— абелева (коммутативная) группа;*

2) $\langle A\backslash\{\mathbf{0}\}, \{\cdot, \mathbf{1}\}\rangle$ *— абелева (коммутативная) группа;*

3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *и* $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ *— дистрибутивность.*

При этом группа $\langle A, \{+, \mathbf{0}\}\rangle$ *называется* **аддитивной группой поля.** $\langle A\backslash\{\mathbf{0}\}, \{\cdot, \mathbf{1}\}\rangle$ *называется* **мультипликативной группой поля**.

Возвращаясь к примерам, приведенным в табл. В1, выделим среди них носители с двумя бинарными операциями. По набору свойств этих операций и наличию дистрибутивности делаем выводы о типе алгебры. Запись в табл. В2 «3=4» означает, что левая и правая дистрибутивность, в случае коммутативной операции «$\cdot$», совпадают.

Таблица В2

Носитель	Сигнатура	Свойства операций	Тип алгебры
$\mathbb{N}$	$+$	$1, 2$	полугруппа
$\mathbb{N}$	$\cdot \mid 1$	$1, 2\ , e = 1, 5$	абелева полугруппа
$\mathbb{Z}$	$+ \mid 0 \mid -a$	$1, 2, e = 0, 5, 6$	абелева группа
$\mathbb{Z}$	$+\mid 0 \mid -a$ $\cdot\mid 1$	$1, 2, e = 0, 5, 6$ $1, 2, e = 1, 5$ $1, \ldots 3, 4\ (3 = 4)$	$\langle\mathbb{Z}, +\rangle$ – абелева группа $\langle\mathbb{Z}, \cdot\rangle$ – *полу*группа $\langle\mathbb{Z}, +, \cdot\rangle$ – кольцо
$\mathbb{R}$	$+\mid 0 \mid -a$ $\cdot\mid 1 \mid a^{-1}$	$1, 2, e = 0, 5, 6$ $1, 2, e = 1, 5, 6$ $1, \ldots 3, 4\ (3 = 4)$	$\langle\mathbb{R}, +\rangle$ – абелева группа $\langle\mathbb{R}, \cdot\rangle$ – абелева группа $\langle\mathbb{R}, +, \cdot\rangle$– **поле**
$\mathbb{C}$	$+\mid 0 \mid -a$ $\cdot\mid 1 \mid a^{-1}$	$1, e = 0, 5, 6$ $1, 2, e = 1, 5, 6$ $1, \ldots 3, 4\ (3 = 4)$	$\langle\mathbb{C}, +\rangle$ – абелева группа $\langle\mathbb{C}, \cdot\rangle$ – абелева группа $\langle\mathbb{C}, +, \cdot\rangle$– **поле**
$M_{2\times 2}$	$+\mid 0_{2\times 2} \mid A$ $\cdot\mid E_{2\times 2}$	$1, 2, e = 0_{2\times 2}, 5, 6$ $2, e = E_{2\times 2}, 5$ $1, \ldots 3, 4\ (3 \neq 4)$	$\langle M_{2\times 2}, +\rangle$ абелева группа $\langle M_{2\times 2}, \cdot\rangle$ *полу*группа $\langle M_{2\times 2}, +, \cdot\rangle$ – кольцо

Как видно из табл. В2, среди приведенных примеров имеется два примера поля — числовые множества $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. В этих множествах возможно как складывать числа, так и вычитать, как умножать, так и делить. Именно поля будут фигурировать в определении линейного пространства. Формулируя в следующем разделе аксиоматическое определение линейного пространства «над полем K», будем иметь в виду любое поле. Это может быть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, но, в конечном счете, важны лишь свойства операций. Выполнение соответствующих свойств (аксиом) позволяет создать общую теорию такой алгебраической структуры, как линейное пространство, вне зависимости от природы элементов линейного пространства или от конкретного вида поля, над которым оно рассматривается.

В заключение введения приведем развернутое определение поля, состоящее из 7 аксиом и не содержащее понятия «группа».

Определение В8. *Пусть A — непустое множество, $+, \cdot$ — операции на множестве A и $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ — элементы множества A. Алгебра $\langle A, \{+, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}\rangle$ называется* **полем** *тогда и только тогда, когда выполняются следующие утверждения (аксиомы поля):*

1) $\forall x, y, z \in A \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ *;*

2) $\exists \mathbf{0} \in A : \forall x \in A \ x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$ *;*

3) $\forall x \in A \ \exists \tilde{x} = -x : \ x + (-x) = (-x) + x = \mathbf{0}$*;*

4) $\forall x, y, z \in A \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *;*

5) $\forall x \in A \ x \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot x = x$ *;*

6) $\forall x \in A \backslash \{\mathbf{0}\} \ \exists \tilde{x} = x^{-1} : \ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = \mathbf{1}$*;*

7) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *и* $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ *– дистрибутивность.*

Глава 1

Линейные пространства

1.1. Основные понятия

1.1.1. *Определение и примеры линейного пространства*

Определение 1.1.1. Линейное пространство над полем K — *это множество* U *(его элементы называются* **векторами***), на котором определена бинарная операция* $+$ *сложения векторов и унарные операции* $\lambda\cdot$ *умножения векторов на числа* λ*, для каждого* λ *из поля* K*, причем выполняются следующие 8 аксиом линейного пространства (свойства указанных операций):*

1) $\forall x, y \in U:\ x + y = y + x$ *(коммутативность);*

2) $\forall x, y, z \in U:\ (x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность);*

3) $\exists \Theta \in U\ \forall x \in U:\ x + \Theta = x$ *(существование нулевого вектора* Θ*);*

4) $\forall x \in U\ \exists (-x) \in U:\ x + (-x) = \Theta$ *(существование обращения векторов);*

5) $\forall x, y \in U,\ \forall \lambda \in K:\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ *(дистрибутивность);*

6) $\forall x \in U,\ \forall \lambda, \mu \in K:\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ *(дистрибутивность);*

7) $\forall x \in U,\ \forall \lambda, \mu \in K:\ (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$*;*

8) если 1 — единичный элемент поля K*, то* $\forall x \in U\ 1 \cdot x = x$*.*

Можно заметить, что, согласно определению В5 на с. 6, множество векторов U образует абелеву группу относительно операции сложения. Второй сорт операций на множестве векторов U — умножение на «числа», т. е. элементы произвольного поля K, также подчиняется определенным аксиомам. Далее приведем уже хорошо известные примеры линейных пространств, проверяя по определению выполнение аксиом линейного пространства. В дальнейшем изложении будем писать ЛП вместо «линейное пространство».

Пример 1.1.1 (пространства направленных отрезков). Здесь рассмотрим геометрические ЛП над полем действительных чисел, т. е. $K = \mathbb{R}$, а элементы основного множества U — направленные отрезки с обычным сложением по правилу треугольника и умножением на действительные числа (растяжение). Все свойства этих операций изучены в курсе векторной алгебры. И, конечно, удовлетворяют всем аксиомам ЛП, если в качестве нулевого элемента рассмотреть нулевой вектор $\Theta = \vec{0}$. Выделим три множества, каждое из которых есть ЛП над $\mathbb{R}$.

1. $U = V^1$ — множество направленных отрезков, параллельных фиксированной прямой.

2. $U = V^2$ — множество направленных отрезков, параллельных фиксированной плоскости.

3. $U = V^3$ — множество всех направленных отрезков трехмерного пространства.

Пример 1.1.2 (функциональные пространства). Обычная операция сложения действительных функций обладает свойствами 1–4 из определения ЛП, если в качестве нулевого элемента взять тождественно нулевую функцию $\Theta(x) \equiv 0$. Можно также умножать функции на действительные числа, причем свойства умножения 5–8 из определения ЛП также очевидно выполняются. Приведем примеры функциональных ЛП над $\mathbb{R}$.

1. $U = C_{[a,b]} = \{f(x) \big| f(x) - \text{непрерывна},\ x \in [a,b]\}$ — ЛП непрерывных на отрезке $[a,b]$ действительных функций.

2. $U = C^1_{[a,b]} = \{f(x) \big| f'(x) - \text{непрерывна},\ x \in [a,b]\}$ — ЛП непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ действительных функций.

3. $U = P_k(x) = \{f(x) \big| f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a \in \mathbb{R}\}$ — ЛП многочленов степени не выше, чем k.

Пример 1.1.3 (матричные пространства). Заметим, что из определения сложения действительных (или комплексных) матриц одинаковой размерности следуют свойства 1–4 определения ЛП, если в качестве нулевого элемента рассматривать нулевую матрицу той же размерности. А обычное умножение матрицы на число (действительное или комплексное) очевидно обладает свойствами 5–8. Приведем примеры некоторых матричных пространств.

1. $U = R_{n\times m}$ — ЛП над $\mathbb{R}$ действительных матриц размерности $n \times m$.

2. $U = C_{n\times m}$ — ЛП над $\mathbb{C}$ комплексных матриц размерности $n \times m$.

3. $U = \mathbb{R}^n = \{x \big|\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_i \in \mathbb{R}\}$ — **арифметическое** ЛП над $\mathbb{R}$

действительных матриц-столбцов размерности $n \times 1$. Здесь $\Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. Это ЛП играет важную роль в теории произвольных ЛП над полем $\mathbb{R}$.

4. $U = \mathbb{K}^n = \{x \big| \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ x_i \in K\}$ — **арифметическое** ЛП матриц-столбцов с элементами из поля K. Здесь $\Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ 0 \in K$.

Во всех приведенных ЛП читатель уже имел опыт вычислений. При этом вполне законно проводились, например, следующие преобразования выражений в V^3. «Сокращение»: $\vec{x}+\vec{y} = \vec{x}$ эквивалентно $\vec{y} = \vec{0}$; «перенос»: $\vec{x}+\vec{y} = \vec{0}$ эквивалентно $\vec{y} = -\vec{x}$ и т. д. Теперь, выстраивая общую теорию ЛП, подобные выражения нужно *выводить* из заданного набора аксиом линейного пространства.

Теорема 1.1.1 (элементарные следствия определения ЛП). *Если U — ЛП над полем K и $x, y, \Theta \in U$, Θ — нулевой элемент U, то верны следующие утверждения:*

1) $y = \Theta \Leftrightarrow \exists x \quad x + y = x$;

2) если $0 \in K$ — нулевой элемент поля K, то $0 \cdot x = \Theta$;

3) $y = -x \Leftrightarrow x + y = \Theta$;

4) если $-1 \in K$ — число, обратное единичному элементу поля K, то $(-1) \cdot x = -x$.

5) если $(-\lambda) \in K$ — число, обратное к λ, то $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

Доказательство.

1. $y = \Theta \Leftrightarrow \exists x \quad x + y = x$. Необходимость утверждается в аксиоме 3. Докажем достаточность. Пусть $x + y = x$. К обеим частям равенства добавим $(-x)$:

$$\left.\begin{array}{r} (-x) + (x + y) \underbrace{=}_{\text{по акс. 2}} \underbrace{((-x) + x)}_{=\Theta \text{ по акс. 4}} + y = \Theta + y \underbrace{=}_{\text{по акс. 3}} y \\ (-x) + x \underbrace{=}_{\text{по акс. 4}} \Theta \end{array}\right\} \Rightarrow y = \Theta.$$

2. $0 \cdot x = \Theta$. Рассмотрим выражение $x + 0 \cdot x$:

$$x + 0 \cdot x \underbrace{=}_{\text{по акс. 8}} 1 \cdot x + 0 \cdot x \underbrace{=}_{\text{по акс. 6}} (1 + 0) \cdot x \underbrace{=}_{\text{по акс. 8}} 1 \cdot x = x.$$

По пункту 1 получаем $0 \cdot x = \Theta$.

3. $y = -x \Leftrightarrow x + y = \Theta$.

Достаточность следует из аксиомы 4. Докажем необходимость. Пусть $x + y = \Theta$. Добавим к обеим частям равенства вектор $(-x)$:

$$\left.\begin{array}{r} (-x) + (x + y) \underbrace{=}_{\text{по акс. 2}} \underbrace{((-x) + x)}_{=\Theta \text{ по акс. 4}} + y = \Theta + y \underbrace{=}_{\text{по акс. 3}} y \\ (-x) + \Theta \underbrace{=}_{\text{по акс. 3}} -x \end{array}\right\} \Rightarrow \ y = -x.$$

4. $(-1) \cdot x = -x$. Вновь, применяя аксиомы, получим

$$(-1) \cdot x + x \underbrace{=}_{\text{по акс. 8}} (-1) \cdot x + 1 \cdot x \underbrace{=}_{\text{по акс. 6}} (-1 + 1) \cdot x = 0 \cdot x \underbrace{=}_{\text{по п. 2}} \Theta,$$

и по пункту 3 получаем $(-1) \cdot x = -x$.

5. $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$.

$$(-\lambda) \cdot x + \lambda \cdot x \underbrace{=}_{\text{по акс. 6}} (-\lambda + \lambda) \cdot x = 0 \cdot x \underbrace{=}_{\text{по п. 2}} \Theta$$

и по пункту 3 получаем $-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x$.

Теорема доказана.

1.1.2. *Линейная зависимость векторов*

Напомним, что векторами мы называем элементы любого линейного пространства. Например, в функциональном пространстве векторами являются функции. В теории ЛП *системой векторов* называют любое множество векторов (элементов) данного ЛП. В данном курсе речь будет идти в основном о конечных системах векторов. Дальнейшая наша цель — изучить важнейшее понятие: линейная зависимость векторов. Заметим здесь, что вводимые термины постоянно содержат слово «линейный». Дело в том, что по сути изучаются свойства именно *линейных операций*, а это — сложение векторов и умножение вектора на число. Не исключение и вводимое в следующем определении понятие.

Определение 1.1.2. *Если $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — система векторов линейного пространства U над полем K, то выражение вида*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k, \ \textit{где } \lambda_i \in K,$$

называется **линейной комбинацией** *векторов данной системы.*

Другими словами, комбинируя сложение и умножение на число (линейные операции), получаем линейную комбинацию векторов данной системы. Никаких ограничений на значения коэффициентов λ_i нет. В частности, они все могут быть равны нулю.

Определение 1.1.3. *Если $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — система векторов линейного пространства U над полем K, то выражение вида*

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_k$$

называется **тривиальной линейной комбинацией** *векторов данной системы. Если в линейной комбинации*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$$

хотя бы один коэффициент λ_i отличен от 0 (число $0 \in K$), то такая линейная комбинация называется **нетривиальной**.

Теперь изучим, когда линейная комбинация векторов может быть равна нулевому вектору $\Theta \in U$. Разумеется нулевой вектор получится для тривиальной линейной комбинации или если система векторов состоит только из одного нулевого вектора. Однако возможно и другое: нетривиальная линейная комбинация ненулевых векторов равна нулевому вектору. Такие системы векторов и называются линейно зависимыми. Сформулируем определение.

Определение 1.1.4. *Система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейного пространства U над полем K называется* **линейно независимой** *(сокращенно* **ЛНС***), когда только тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору:*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \Theta \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

В противном случае, система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ называется **линейно зависимой**.

В силу важности вводимого понятия, сформулируем отдельно определение линейно зависимой системы векторов.

Определение 1.1.5. *Система векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейного пространства U над полем K называется* **линейно зависимой**, *когда найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ поля K, не все равные 0, что имеет место равенство*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \Theta,$$

т. е. нетривиальная линейная комбинация векторов равна нулевому вектору.

Введенное понятие линейной независимости может быть расширено на бесконечные системы векторов. Особенно это актуально для функциональных ЛП.

Теорема 1.1.2 (критерий линейной зависимости векторов). *Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных векторов этой системы.*

Доказательство. *Необходимость.* Если система $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ линейно зависима, то нетривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \Theta \quad \text{и некоторый коэффициент } \lambda_s \neq 0.$$

Тогда

$$a_s = -\frac{\lambda_1}{\lambda_s} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_s} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s} a_{s-1} - \frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} a_{s+1} - \ldots - \frac{\lambda_i}{\lambda_k} a_k,$$

т. е., полагая $\mu_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_s}$, получим

$$a_s = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_{s-1} a_{s-1} + \mu_{s+1} a_{s+1} + \ldots + \mu_k a_k.$$

Итак, вектор a_s есть линейная комбинация остальных векторов системы.

Достаточность. Если вектор a_t есть линейная комбинация остальных, то $a_t = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k$.

Перенося a_t в правую часть, имеем

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{t-1} a_{t-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot a_t + \lambda_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \lambda_k a_k = \Theta.$$

В этой линейной комбинации коэффициент перед вектором a_t отличен от 0, поэтому линейная комбинация нетривиальная, но равна нулевому вектору. Таким образом, система $\{a_1, \ldots, a_k\}$ линейно зависима, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема удобна для проверки линейной зависимости системы. Другой способ определить зависима или независима система векторов — определение. Далее рассмотрим примеры различных систем векторов и проверим, являются ли они зависимыми.

Пример 1.1.4 (системы направленных отрезков). В ЛП V^3 рассмотрим некоторые системы векторов. Заметим, что $\Theta = \vec{0}$ — направленный отрезок нулевой длины.

1. Системы, состоящие из одного вектора $\{\vec{a}\}$.

Возможно два случая: $\vec{a} = \vec{0}$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$. В первом случае система из одного нулевого вектора зависима, так как нетривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору: $\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$. Во втором случае ненулевой вектор образует независимую систему, так как $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \lambda = 0$.

2. Системы, состоящие из двух векторов $\{\vec{a}, \ \vec{b}\}$.

Рассмотрим возможное взаимное расположение направленных отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и сделаем выводы о зависимости системы по определению, исходя из признаков коллинеарности векторов:

2*a*) $\vec{a} = \vec{0}, \ \vec{b} \neq \vec{0} \ \Rightarrow \ \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0} \ \Rightarrow$ система $\vec{a}, \ \vec{b}$ зависима;

2*b*) $\vec{a} \neq \vec{0}, \ \vec{b} \neq \vec{0}\ , \vec{a} \parallel \vec{b} \ \Rightarrow \ \vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \ \Rightarrow \ \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{a} + (-\alpha) \cdot \vec{b} = \vec{0}$

следовательно, система $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ зависима;

2*c*) $\vec{a} \neq \vec{0}, \ \vec{b} \neq \vec{0}\ , \vec{a} \nparallel \vec{b}$ и $\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = \vec{0} \ \Rightarrow$ если $\lambda_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b}$, что противоречит условию $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и система $\{\vec{a}, \ \vec{b}\}$ независима.

3. Системы, состоящие из трех векторов $\{\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}\}$.

Снова рассмотрим возможные случаи.

3*a*) $\vec{a} = \vec{0}, \ \vec{b} \neq \vec{0}, \ \vec{c} \neq \vec{0} \ \Rightarrow \ \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0} \ \Rightarrow$ система $\{\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}\}$ зависима;

3*b*) $\vec{a} \neq \vec{0}, \ \vec{b} \neq \vec{0}, \ \vec{c} \neq \vec{0}, \ \vec{a} \parallel \vec{b} \ \Rightarrow$ по пункту 2*b*) система $\{\vec{a}, \ \vec{b}\}$ зависима: $\underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \ \underbrace{\lambda_1}_{\neq 0} \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow$ система $\{\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}\}$ зависима;

3*c*) $\vec{a} \neq \vec{0}, \ \vec{b} \neq \vec{0}, \ \vec{c} \neq \vec{0}, \ \vec{a} \nparallel \vec{b}$ и все векторы лежат в одной плоскости, тогда $\vec{c}$ раскладывается по $\vec{a}, \ \vec{b} : \vec{c} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$ и по теореме 1.1.2 система $\{\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}\}$ зависима;

3*d*) $\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}$ некомпланарны, тогда никакой из векторов не раскладывается по другим и по теореме 1.1.2 система $\{\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}\}$ независима.

4. Системы, состоящие из четырех векторов $\{\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}, \ \vec{d}\}$.

Можно рассматривать подробно всевозможные случаи взаимного расположения четырех векторов в пространстве. Но при этом придется повторить рассуждения, приведенные в пунктах 2 и 3 для случаев наличия нулевого вектора (см. 3*a*) или существования линейно зависимой подсистемы среди выбранных четырех векторов (см. 3*b*). Вывод в обоих случаях — вся система зависима.

Остается рассмотреть случай, когда среди векторов есть тройка некомпланарных. Но тогда четвертый вектор раскладывается по некомпланарной тройке и, по теореме 1.1.2, система $\{\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}, \ \vec{d}\}$ зависима.

Если рассматривать системы, состоящие из 5 и более векторов, то поскольку подсистема из четырех векторов зависима, то и содержащие ее системы тоже зависимы. Конечно это утверждение получено сейчас на примерах. Но в следующей теореме оно будет доказано.

В разобранном примере 1.1.4 на зависимость системы векторов оказывал влияние геометрический характер пространства: зависимость системы направленных отрезков определяется их взаимным расположением. Но если ЛП состоит из других элементов, то и признаки зависимости систем векторов будут другие. Разберемся, как это выглядит в арифметическом матричном пространстве.

Пример 1.1.5 (системы векторов-столбцов). Рассмотрим системы векторов в ЛП $\mathbb{R}^3 = \{x \big| \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ x_i \in \mathbb{R}\}$.

1. Система, состоящая из одного вектора $\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\}$, зависима тогда и только тогда, когда $x = \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Доказательство повторяет рассуждение из примера 1.1.4 пункт 1.

2. Системы, состоящие из двух ненулевых векторов:
$\{a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\}$.
По теореме 1.1.2, система $\{a, \ b\}$ зависима тогда и только тогда, когда $a = \alpha \cdot b$. Тогда признак зависимости для векторов-столбцов — пропорциональность их компонент: $b_1 = \alpha \cdot a_1, \ b_2 = \alpha \cdot a_2, \ b_3 = \alpha \cdot a_3$.

3. Системы, состоящие из трех ненулевых векторов:
$\{a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\}$. Исследование линейной зависимости по определению сводится к изучению равенства

$$\lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b + \lambda_3 \cdot c = \Theta \ \Leftrightarrow \ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если существует нетривиальный набор $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3$, удовлетворяющий этому равенству, тогда система зависима. Но равенство задает однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных λ_1, λ_2, λ_3, с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Далее остается только воспользоваться теорией систем линейных уравнений (СЛУ): система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа неизвестных. Итак, признак зависимости системы из трех векторов: $\mathrm{Rg}(A) < 3$. Исследование систем с большим числом векторов приводит также к теории СЛУ и вычислению ранга матриц.

Полученные в примерах «опытным» путем свойства линейно зависимых и независимых систем разберем в следующей теореме.

Обобщим далее хорошо известное из векторной алгебры понятие разложения вектора по системе векторов.

Определение 1.1.6. *Если вектор b из ЛП U над полем K равен линейной комбинации векторов системы $a_1 \ldots, a_k$, т. е.*

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k,\ \ \lambda_i \in K,$$

то будем говорить, что вектор b **раскладывается по системе векторов** *$a_1 \ldots, a_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.*

Теорема 1.1.3 (свойства линейной зависимости). *Для любого ЛП U над полем K верны утверждения:*

1) *система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой;*

2) *если подсистема векторов $\mathcal{B}$ системы векторов $\mathcal{A}$ является линейно зависимой, то и $\mathcal{A}$ — линейно зависимая система векторов;*

3) *если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима;*

4) *если $\mathcal{A}$ — линейно независимая система векторов и $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, где $u_k \in \mathcal{A}$, — разложение вектора x в линейную комбинацию попарно различных векторов из $\mathcal{A}$, то коэффициенты λ_k определяются однозначно.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{A} = \{\Theta, a_1, \ldots, a_k\}$. Тогда нетривиальная линейная комбинации векторов равна нулевому вектору

$$\underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \Theta + 0 \cdot a_1 + \ldots + 0 \cdot a_k = \Theta.$$

Значит, система (по определению) зависима.

2. Пусть подсистема $a_1, \dots, a_m$ системы $a_1, \dots, a_m, \dots, a_k$ линейно зависима. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация векторов $a_1, \dots, a_m$, равная Θ. Используем ее для создания новой нетривиальной линейной комбинации всей системы:

$$\underbrace{\underbrace{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots \lambda_m \cdot a_m}_{=\Theta,\ \text{нетрив. л.к}} + 0 \cdot a_{m+1} + \dots + 0 \cdot a_k}_{\text{нетрив. л.к}} = \Theta.$$

Получили линейную зависимость всей системы.

3. Это свойство эквивалентно свойству 2. Действительно, если система линейно независима, то в силу свойства 2 ее подсистема не может быть зависима.

4. Пусть вектор b раскладывается по системе $a_1, \dots, a_k$ неоднозначно:

$$b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i)\, a_i = \Theta.$$

Так как $\mathcal{A}$ — линейно независимая система векторов, то только тривиальная их линейная комбинация равна нулевому вектор, т. е. все коэффициенты в этом разложении равны 0: $\lambda_i - \mu_i = 0$, $\lambda_i = \mu_i$. Все свойства доказаны.

1.2. Базис и координаты

Этот раздел посвящен обобщению понятия «система координат» для произвольного ЛП. Напомним, что для геометрического ЛП направленных отрезков V^3 декартова система координат вводится с помощью тройки взаимно перпендикулярных векторов единичной длины $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. Тогда декартовы координаты каждого вектора $\vec{x}$ есть коэффициенты в разложении $\vec{x}$ по системе $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$: $\vec{x} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}$. Таким образом, система координат является «мостом», который позволяет перевести язык геометрии на язык алгебры. Такие операции на векторах, как сложение, умножение на число или скалярное произведение становится возможным считать через координаты. То же самое можно делать в любом ЛП, вводя «системы координат» (базисы). Ключевую роль в этом будет играть понятие линейно независимой системы векторов (ЛНС).

1.2.1. *Базисы и размерность ЛП*

Определение 1.2.1. Максимальной линейно независимой подсистемой *(МЛНС) системы векторов $\mathcal{A}$ линейного пространства U называется* *подмножество $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ такое, что система $\{\mathcal{B}, x\}$ является линейно зависимой, если $x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.*

Примером МЛНС служит система взаимно ортогональных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в ЛП V^3. Действительно, добавление любого вектора делает систему зависимой (см. пример 1.1.4, пункт 4 на с. 15). Но одновременно именно эта система задает систему координат. Заметим, что в этом курсе мы не определили бесконечные линейно независимые системы, хотя некоторые функциональные пространства обладают именно такими системами. Соответственно здесь мы определим лишь конечные базисы.

Определение 1.2.2. *Конечная упорядоченная система векторов* $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *называется* **базисом** *ЛП U над полем K, если выполняются следующие два условия:*

1) **Б** *— линейно независимая система;*

2) **Б** *является системой порождающих для U, то есть*

$$\forall x \in U \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n : \ x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

При этом, упорядоченный набор чисел $\lambda_i \in K$, $1 \leq i \leq n$ называется **координатами** *вектора x в базисе* **Б***.*

Заметим, что определение коротко можно было сформулировать так: *базис* **Б** *является МЛНС пространства U.*

Теорема 1.2.1 (о единственности разложения по базису). *Координаты вектора в данном базисе определяются однозначно.*

Доказательство. Это следствие из свойства ЛНС, пункт 4 теоремы 1.1.3.

Продолжая аналогию с геометрическим ЛП V^3, заметим, что разместить систему координат в пространстве можно по разному, т. е. наборов векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, определяющих систему координат, бесконечно много. Однако количество векторов в каждой системе координат одинаково — три. Это число соответствует размерности геометрического пространства. Покажем, что в любом ЛП количество векторов в каждом базисе постоянно.

Теорема 1.2.2 (Штейниц). *Если каждый вектор ЛНС $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ линейно выражается через векторы ЛНС $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, то $n \leq m$.*

Эту теорему примем без доказательства. Доказательство изложено, например, в учебнике Д. В. Беклемишева [1] на с. 195.

Теорема 1.2.3 (о количестве базисных векторов). *Пусть* $\textbf{Б}_1$ *и* $\textbf{Б}_2$ *— два базиса ЛП* U*, причем* $\textbf{Б}_1$ *— конечное множество. Тогда* $\textbf{Б}_2$ *— также конечное множество и число векторов в базисах* $\textbf{Б}_1$ *и* $\textbf{Б}_2$ *одинаково.*

Доказательство. Поскольку $\textbf{Б}_1$ — базис, то по определению базиса 1.2.2 любой вектор из U является линейной комбинацией векторов из $\textbf{Б}_1$. В частности, любой вектор из $\textbf{Б}_2$ является линейной комбинацией векторов из $\textbf{Б}_1$. По теореме Штейница 1.2.2 (с. 20) число векторов в системе $\textbf{Б}_1$ не меньше, чем в системе $\textbf{Б}_2$. Аналогично рассуждая для базиса $\textbf{Б}_2$, получим обратное неравенство, откуда следует, что в $\textbf{Б}_1$ и в $\textbf{Б}_2$ одинаковое количество векторов, что и требовалось доказать.

Теперь, благодаря доказанной теореме, можно корректно ввести следующее определение.

Определение 1.2.3. *Если количество векторов в базисе ЛП* U *конечно, то это количество векторов называется* **размерностью** *линейного пространства* U*. Обозначение:* $\dim U$*. В противном случае,* U *—* **бесконечномерное ЛП***.*

Теорема 1.2.4 (о дополняемости до базиса). *Любую линейно независимую систему векторов* $\mathbf{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ *конечномерного ЛП* U *можно дополнить до базиса* $\mathbf{B}' = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ *ЛП* U*.*

Доказательство. Действительно, дополним систему $\mathbf{B}$ до максимальной линейно независимой системы $\mathbf{B}'$ векторов линейного пространства U. Но тогда $\mathbf{B}'$ является базисом линейного пространства U по определению 1.2.2.

Теперь приведем примеры базисов в различных ЛП.

Пример 1.2.1 (базисы в ЛП направленных отрезков). Будем проверять определение базиса 1.2.2, используя факты о ЛНС, полученные в примере 1.1.4 (с. 15).

1. В ЛП V^1 базисом является любой ненулевой вектор:

$$\textbf{Б} = \{\vec{a}\},\ \vec{a} \neq \vec{0},\ \dim V^1 = 1.$$

Действительно, во-первых, система из одного ненулевого вектора линейно независима и, во-вторых, все системы из двух и более векторов зависимы (все векторы V^1 коллинеарны). Другими словами, $\textbf{Б} = \{\vec{a}\}$ — МЛНС в ЛП V^1, т. е. базис.

2. В ЛП V^2 базисом является любая пара неколлинеарных векторов:

$$\textbf{Б} = \{\vec{a}, \vec{b}\},\ \vec{a} \nparallel \vec{b},\ \dim V^2 = 2.$$

В примере на с. 15 показано, что такая система линейно независима и каждый вектор плоскости раскладывается по ней.

3. В ЛП V^3 базисом является любая тройка некомпланарных векторов:

$$\textbf{Б} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\},\ \dim V^3 = 3,$$

так как это ЛНС и каждый вектор пространства по ней раскладывается.

Пример 1.2.2 (базисы в матричных ЛП). В матричных пространствах приведем примеры простейших *канонических* базисов.

1. *Канонический базис* в ЛП действительных матриц $R_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix} \big| x, y, t, z \in \mathbb{R} \right\}$:

$$\textbf{Б} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\ \dim R_{2\times 2} = 4.$$

2. *Канонический базис* в ЛП действительных симметричных матриц $S_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \big| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$:

$$\textbf{Б} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\ \ \dim S_{2\times 2} = 3.$$

Проверим по определению 1.2.2, что система **Б** (считаем ее упорядоченной) действительно базис, т. е., во-первых, она линейно независима и, во-вторых, всякий вектор по ней раскладывается.

Докажем, что система **Б** линейно независима:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $x = y = z = 0$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем второе утверждение из определения базиса: каждый вектор (матрица) из $S_{2\times 2}$ раскладывается по системе **Б**.

Рассмотрим произвольный вектор $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_{2\times 2}$. Тогда

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Мы доказали, что система векторов

$$\textbf{Б} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

является базисом линейного пространства $S_{2\times 2}$.

3. *Канонический базис* в арифметическом ЛП матриц-столбцов

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, |x, y, z \in \mathbb{R} \right\}:$$

$$\mathbf{Б} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\ \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

Понятно, что $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Пример 1.2.3 (базисы в функциональных ЛП). Здесь приведем примеры как конечномерных, так и бесконечномерных ЛП.

1. *Канонический базис* в ЛП многочленов степени не выше, чем 2:

$$P_2(x) = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1 = x^2, e_2 = x, e_3 = 1\},\ \dim P_2(x) = 3.$$

2. *Канонический базис* в ЛП U действительных функций — решений дифференциального уравнения $y'' + y = 0$:

$$U = \{y(x) | y'' + y = 0\} = \{y(x) = a\cos x + b\sin x | a, b \in \mathbb{R}\};$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1 = \cos x, e_2 = \sin x\},\ \dim U = 2.$$

3. Бесконечный базис в ЛП U непрерывных 2π-периодических функций:

$$U = \{f(x) | \forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x + 2\pi) = f(x)\};$$

$$\mathbf{Б} = \{e_1 = \sin x, e_2 = \cos x, \ldots, e_{2k-1} = \sin kx, e_{2k} = \cos kx, \ldots\},\ k \in \mathbb{N},$$

$\dim U = \infty$. Поскольку всякая функция из U раскладывается в тригонометрический ряд Фурье [4] и всякая подсистема из **Б** линейно независима, **Б** — бесконечный базис ЛП U.

1.2.2. *ЛП координатных столбцов* K^n

Введение понятий «базис» ЛП U и «координаты» вектора $x \in U$ позволяет решать задачи, связанные с линейными операциями, одинаково в любом ЛП, проводя вычисления в координатах. Итак, язык координат является универсальным в теории ЛП. Для начала договоримся о матричном обозначении набора координат вектора в данном базисе.

Если $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис ЛП U над полем K, то для любого вектора x из U столбец координат вектора x в базисе $\mathbf{Б}$ обозначается через $[x]_{\mathbf{Б}}$:

$$[x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n, \ \lambda_i \in K. \tag{1.1}$$

В силу единственности разложения вектора по базису (теорема 1.2.1) имеем взаимно однозначное соответствие между ЛП U, $\dim U = n$ и арифметическим ЛП K^n:

$$\forall x \in U, \ x \ \leftrightarrow \ [x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_i \in K.$$

Причем это соответствие (т. е. функция) «сохраняет» операции линейного пространства [1]. Сформулируем это в следующей теореме.

Теорема 1.2.5 (операции в координатах). *Если* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— базис ЛП* U *над полем* K*, то* $\forall x, y \in U$, $\forall \alpha \in K$ *верны равенства*
1) $[x]_{\mathbf{Б}} + [y]_{\mathbf{Б}} = [x + y]_{\mathbf{Б}}$*;*
2) $[\alpha \cdot x]_{\mathbf{Б}} = \alpha \cdot [x]_{\mathbf{Б}}$.

Доказательство. Имеем

$$[x]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n;$$

$$[y]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n.$$

Тогда

$$x + y = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n) + (\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \ldots + \mu_n e_n) =$$

$$= (\lambda_1 + \mu_1) e_1 + (\lambda_1 + \mu_2) e_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) e_n \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ [x + y]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \ldots \\ \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \ldots \\ \mu_n \end{pmatrix} = [x]_{\mathbf{Б}} + [y]_{\mathbf{Б}}.$$

Пункт 1) доказан; 2) доказывается аналогично.

[1] Такая функция называется «изоморфизм», но использовать здесь это понятие мы не будем.

Теорема 1.2.6 (линейная зависимость в координатах).

Если $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *— базис ЛП* U *над полем* K*, то система векторов* $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset U$ *линейно независима тогда и только тогда, когда система их координатных столбцов* $\{[a_1]_{\mathbf{Б}}, \ldots, [a_k]_{\mathbf{Б}}\} \subset K^n$ *линейно независима.*

Доказательство. По теореме об операциях в координатах, имеем

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots \lambda_k a_k = \Theta \Leftrightarrow \lambda_1 [a_1]_{\mathbf{Б}} + \ldots + \lambda_k [a_k]_{\mathbf{Б}} = [\Theta]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если система $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset U$ линейно независима, то однозначно $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$. С другой стороны, если предположить, что при этом система $\{[a_1]_{\mathbf{Б}}, \ldots, [a_k]_{\mathbf{Б}}\} \subset K^n$ линейно зависима, то нетривиальной линейной комбинации этих столбцов будет соответствовать такая же нетривиальная линейная комбинация векторов $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset U$, равная нулевому вектору из U. Получено противоречие с предположением линейной независимости. Обратное утверждение доказывается также.

Теперь, собирая все изученные теоремы вместе, можно сделать вывод, что вне зависимости от природы элементов ЛП, пространства их координат устроены одинаково.

Универсальность арифметического ЛП K^n основана на следующих утверждениях:

1) ЛП U, $\dim U = n$, для данного базиса $\mathbf{Б}$ однозначно представляется пространством координатных столбцов K^n (теорема о единственности разложения по базису 1.2.1);

2) операциям ЛП U соответствуют матричные операции столбцов в ЛП K^n (теорема об операциях в координатах 1.2.5);

3) линейно независимым системам в ЛП U соответствуют линейно независимые системы их столбцов координат в ЛП K^n (теорема о линейной зависимости в координатах 1.2.6).

Таким образом, вычисления в ЛП проводятся в координатах. Укажем последовательность действий при таких вычислениях.

Решение задач на языке координат:

1) выбрать, по возможности, удобный базис в ЛП U над полем K;

2) задать каждый элемент U его координатным столбцом;

3) переформулировать задачу на языке матриц в ЛП K^n и решить ее;

4) полученный результат сформулировать для ЛП U.

1.2.3. *Линейная зависимость в ЛП* $\mathbb{R}^n$

Все полученные до сих пор результаты не зависят ни от природы элементов ЛП U, ни от типа числового поля K. Однако на этом этапе мы свели изучение ЛП к изучению арифметического ЛП матриц-столбцов K^n. Но теория матриц и систем линейных уравнений, изученная в предыдущем курсе [1], была построена для случая действительной арифметики. Поэтому, чтобы иметь возможность пользоваться выводами теории матриц и СЛУ, рассмотрим далее решение стандартных задач в ЛП $\mathbb{R}^n$, т. е. если $K = \mathbb{R}$. Тем не менее, рассуждения и выводы, которые будут получены для ЛП $\mathbb{R}^n$, практически дословно переносятся на ЛП K^n для произвольного поля K.

Теорема 1.2.7 (критерий линейной зависимости в ЛП $\mathbb{R}^n$). *Система векторов-столбцов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ из ЛП $\mathbb{R}^n$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен их количеству k.*

Доказательство. Рассмотрим систему векторов из ЛП $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \ldots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, a_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \ldots \\ a_{kn} \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots \lambda_k a_k = \Theta \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{21} \\ \ldots \\ a_{2n} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_k \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \ldots \\ a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Но приведенное матричное равенство есть векторная запись однородной СЛУ $AX = O$ с матрицей системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{k1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} \text{ и столбцом неизвестных } X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Однородная система имеет единственное тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных:

$$\mathrm{Rg}(A) = k \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Как видно из доказанной теоремы, изучение линейной зависимости системы векторов-столбцов сводится к вычислению ранга матрицы.

Теорема 1.2.8 (МЛНС в системах из ЛП $\mathbb{R}^n$). *Всякая МЛНС для системы векторов-столбцов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ из ЛП $\mathbb{R}^n$ состоит из одинакового числа столбцов, равного рангу матрицы $A_{n\times k}$, составленной из всех векторов системы $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Утверждение является следствием теоремы 1.2.7. Действительно, предположим, что в системе векторов-столбцов $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ из $\mathbb{R}^n$, подсистема $\mathcal{B} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$ максимальная линейно независимая (МЛНС). Тогда, по теореме 1.2.7, ранг матрицы $B_{n\times r}$, составленной из столбцов $\mathcal{B}$, равен количеству столбцов r. Осталось показать, что ранги матриц равны: $r = \mathrm{Rg}(B_{n\times r}) = \mathrm{Rg}(A_{n\times r})$. В силу максимальности системы $\mathcal{B}$ добавление любого столбца из $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ делает систему зависимой, а значит, по признаку линейно зависимых систем (теорема 1.1.2) каждый столбец из $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ есть линейная комбинация столбцов из $\mathcal{B}$. Известно из теории матриц [1], что тогда $\mathrm{Rg}(B_{n\times r}) = \mathrm{Rg}(A_{n\times r})$. Что и требовалось доказать.

Далее заметим, что элементарные преобразования как строк, так и столбцов матрицы не меняют ее ранга. Причем, если проводить *построчные* элементарные преобразования матрицы $A_{n\times k}$, составленной из столбцов $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, эти преобразования не поменяют ранг не только матрицы $A_{n\times k}$, но также не изменится и ранг матрицы $B_{n\times r}$. Каждое *построчное* преобразование матрицы $A_{n\times k}$ индуцирует такое же преобразование матрицы $B_{n\times r}$, столбцы при этом не «перемешиваются». Но тогда можно сделать вывод: вычисляя ранг матрицы $A_{n\times k}$, можно находить линейно независимые подсистемы столбцов. Для максимальных линейно независимых подсистем ранг матрицы $B_{n\times r}$ будет равен рангу $A_{n\times k}$, а система (МЛНС) столбцов матрицы $B_{n\times r}$ называется *базисными столбцами* матрицы $A_{n\times k}$. Теперь сформулируем алгоритм нахождения МЛНС.

Нахождение МЛНС в ЛП $\mathbb{R}^n$ для системы $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$:

1) составить матрицу размерности $A_{n\times k}$ из столбцов системы $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$;

2) *построчными* преобразованиями вычислить ранг матрицы, приведя ее к упрощенному виду;

3) вектор-столбцы, соответствующие базисным, образуют МЛНС, количество векторов в которой равно рангу матрицы $A_{n\times k}$: $\mathrm{Rg}(A_{n\times k}) = r,\ r \le k$.

Пример 1.2.4 (нахождение МЛНС в ЛП $S_{2\times 2}$). В ЛП $S_{2\times 2}$ выделить МЛНС из системы векторов:

$$\mathcal{A} = \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Реализуем план решения со с. 25 и фиксируем базис в ЛП $S_{2\times 2}$. В примере 1.2.2 на с. 22 был построен канонический базис пространства симметричных матриц $S_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$:

$$\mathbf{Б} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\ \dim S_{2\times 2} = 3.$$

Далее раскладываем каждый из векторов a_i по данному базису. Очевидно, что

$$a_1 = 2e_1 + 4e_2 + 2e_3,\ a_2 = (-1)e_1 + (-2)e_2 + (-1)e_3,$$

$$a_3 = 3e_1 + 5e_2 + e_3,\ a_4 = (-2)e_1 + e_2 + 8e_3 \ \Leftrightarrow$$

$$[a_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, [a_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, [a_3]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, [a_4]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь задача переформулирована в ЛП координатных столбцов $\mathbb{R}^3$ и алгоритм ее решения дан на с. 27. Нужно построчными преобразованиями вычислить ранг матрицы, составленной из столбцов координат:

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Понятно, что большего количества нулевых строк получено быть не может. Это значит, что ранг матрицы вычислен и $\mathrm{Rg}(A_{3\times 4}) = 2$. Поскольку столбцы не участвовали в элементарных преобразованиях, мы делаем выводы о линейной зависимости столбцов $[a_i]_{\mathbf{Б}}$ по их преобразованному виду в матрице C. Соответственно в матрице C в качестве базисных можно указать следующие пары столбцов: 2- и 3-й; 1- и 3-й; 3- и 4-й; 1- и 4-й; 2- и 4-й. Все матрицы, составленные из этих пар, имеют ранг 2. Теперь можно сделать вывод о МЛНС первоначальной системы матриц. МЛНС состоит из двух векторов и определяется неоднозначно. Можно указать несколько вариантов: a_1 и a_3; a_2 и a_3; a_3 и a_4; a_1 и a_4; a_2 и a_4. Обычно в таких задачах достаточно указать хотя бы одну МЛНС.

1.3. Матрица перехода из базиса в базис

В предыдущем разделе были изучены понятия базис и координаты. Понятно, что базисов (так же, как и систем координат в геометрии) бесконечно много в данном ЛП. Соответственно координаты каждого вектора в разных базисах разные. Однако, так как они характеризуют один и тот же вектор в разных «системах координат», то связь между координатами, конечно, существует. В данном разделе выведем формулы, вычисляющие координаты вектора в «новом» базисе через его координаты в «старом» базисе.

1.3.1. *Определение и свойства матрицы перехода*

Определение 1.3.1. *Пусть* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathbf{Б}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *— два базиса ЛП* U *над полем* K. **Матрицей перехода** *из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$ *называется матрица* $T = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = (t_{ji})_{n\times n}$, *коэффициенты которой определяются равенствами*

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j, \quad t_{ji} \in K. \tag{1.2}$$

Таким образом, *i-й столбец матрицы перехода из* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$ *представляет собой столбец координат вектора* e'_i *в базисе* $\mathbf{Б}$.

Теперь, с помощью введенного понятия матрицы перехода, появилась возможность полностью абстрагироваться от природы элементов конкретного ЛП и в пространстве координат K^n проводить вычисления не только в конкретном базисе, но и делать переход в другой базис, представляя векторы координатами в любом базисе. Таким образом, все вычисления в ЛП будут носить матричный характер. Чтобы сделать матричные формулы более компактными, договоримся о некоторых обозначениях.

Матричные формы записи

1. Учитывая, что

$$[e'_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \ldots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, [e'_n]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \ldots \\ t_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & \ldots & t_{2n} \\ & \ldots & \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}, \text{ получим}$$

$$T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} [e'_1]_{\mathbf{Б}} & \ldots & [e'_n]_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Матрица перехода есть столбцы координат «новых» базисных векторов в «старом» базисе.

2. Введем матрицы-строки, элементами которых будут базисные векторы

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}' = \begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$e_1' = t_{11}e_1 + \ldots + t_{n1}e_n = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \ldots \\ t_{n1} \end{pmatrix} = \mathbf{e} \cdot [e_1']_{\mathbf{Б}}\,, \ldots, e_n' = \mathbf{e} \cdot [e_n']_{\mathbf{Б}}\,.$$

Учитывая правило умножения матриц «строка на столбец», имеем

$$\mathbf{e}' = \begin{pmatrix} e_1' & \ldots & e_n' \end{pmatrix} = \mathbf{e} \cdot \begin{pmatrix} [e_1']_{\mathbf{Б}} & \ldots & [e_n']_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix} = \mathbf{e} \cdot T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'}, \tag{1.4}$$

$$\text{итак} \;\; \mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'}\,.$$

3. Аналогично для всякого вектора $x \in U$ и всякого базиса $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \mathbf{e} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}\,. \tag{1.5}$$

Теорема 1.3.1 (свойства матрицы перехода). *Для любых базисов* $\mathbf{Б}$, $\mathbf{Б}'$, $\mathbf{Б}''$ *в ЛП* U *над полем* K *верны следующие утверждения:*

1) матрица перехода $T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'}$ *определяется однозначно, т.е. по формуле (1.4):*

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot T_1 \\ \mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot T_2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; T_1 = T_2;$$

2) матрица перехода является невырожденной и $T^{-1}_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} = T_{\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}}$;

3) верна формула $T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}''} = T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} \cdot T_{\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}''}$.

Доказательство. 1. Утверждение следует из определения матрицы перехода и однозначности координат вектора в базисе.

Доказательства проведем для случая $K = \mathbb{R}$, так как ссылаться можно лишь на известную теорию действительных матриц.

2. Покажем сначала, что матрица перехода является невырожденной, т. е. ее определитель отличен от нуля. Действительно, так как $T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} [e_1']_{\mathbf{Б}} & \ldots & [e_n']_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix}$, а система столбцов этой матрицы является линейно независимой в ЛП $\mathbb{R}^n$, то по теореме 1.2.7 ранг матрицы равен числу столбцов n. Значит, $|T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'}| \neq 0$ [1]. В частности, матрица обратима.

Теперь докажем формулу $T^{-1}_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} = T_{\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}}$. Для этого домножим равенство $\mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'}$ (1.4) на $T^{-1}_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'}$ справа:

$$\mathbf{e}' \cdot T^{-1}_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} = \mathbf{e} \cdot T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} \cdot T^{-1}_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} = \mathbf{e}.$$

Получили равенство $\mathbf{e}' \cdot T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = \mathbf{e}$, которое означает, что $T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}}$.

3. $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}''} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}''}$.

Докажем это равенство, используя формулу (1.4): $\mathbf{e}' = \mathbf{e} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ для трех базисов:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}'' = \mathbf{e} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}''} \\ \mathbf{e}'' = \mathbf{e}' \cdot T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}''} = (\mathbf{e} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}) \cdot T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}''} = \mathbf{e} \cdot (T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}''}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{по свойству 1)}} \quad T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}''} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}''}.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.3.2 (связь координат вектора в разных базисах). *Для любых базисов* **Б**, **Б**$'$ *в ЛП* U *над полем* K, *если* $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — *матрица перехода из базиса* **Б** *в базис* **Б**$'$, *то для любого вектора* $x \in U$ *справедлива формула*

$$[x]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Для всякого вектора x и базисов **Б, Б**$'$:

$$x \overset{(1.5)}{=} \mathbf{e} \cdot \underbrace{[x]_{\mathbf{Б}}}_{\text{координаты } x} = \mathbf{e}' \cdot [x]_{\mathbf{Б}'} \overset{(1.4)}{=} (\mathbf{e}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}) \cdot [x]_{\mathbf{Б}'} = \mathbf{e} \cdot \underbrace{(T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'})}_{\text{координаты } x}.$$

В силу однозначности координат в данном базисе имеем

$$[x]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'} \;\Leftrightarrow\; [x]_{\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'}.$$

Поменяв обозначения **Б** и **Б**$'$, получим утверждение теоремы.

Замечание. В доказательстве использовались эквивалентные матричные формулы связи координат вектора в разных базисах. Но для запоминания удобна формула

$$[x]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'}. \tag{1.7}$$

1.3.2. *Задачи на матрицу перехода в ЛП* $\mathbb{R}^n$

В предыдущем разделе получены основные матричные формулы, связанные с матрицей перехода из базиса в базис и с вычислением координат вектора в разных базисах. Но координаты — элементы ЛП координат K^n, если речь идет о ЛП над числовым полем K. С другой стороны, в любом ЛП имеется набор стандартных задач, связанных с линейными операциями: изучение линейной зависимости систем векторов; выделение МЛНС; разложение вектора по ЛНС (МЛНС, базису); нахождение матрицы перехода из базиса в базис; нахождение новых координат вектора по старым координатам и т. д. Часть перечисленных задач уже разбиралась (см. примеры 1.1.5, 1.2.4). Заметим также, что в силу универсальности пространства координат K^n, все перечисленные задачи имеют стандартные решения на языке координат в ЛП K^n. В данном разделе рассмотрим на примерах алгоритмы решения задач,связанных с матрицей перехода, в действительных ЛП, т. е. для $K = \mathbb{R}$.

Пример 1.3.1 (нахождение матрицы перехода в ЛП $\mathbb{R}^n$). Рассмотрим задачу нахождения матрицы перехода для разных пар базисов в ЛП $\mathbb{R}^3$.

1. Найти матрицу перехода из базиса **Б** в базис **Б**$'$:

$$\mathbf{Б} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{Б}' = \left\{ e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Заметим, прежде всего, что важно *направление* перехода: «старый» базис — **Б**, «новый» базис — **Б**$'$. Тогда, по определению, нужно находить разложение «новых» базисных векторов e'_i по «старому» базису e_j. Очевидно, что

$$e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [e'_1]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и аналогично } [e'_2]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [e'_3]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Осталось собрать матрицу перехода (см. матричную форму записи (1.3))

$$T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} = \left([e'_1]_{\mathbf{Б}} \ \ [e'_2]_{\mathbf{Б}} \ \ [e'_3]_{\mathbf{Б}} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом пункте рассмотрена простейшая ситуация: базис ЛП — канонический, поэтому матрица просто состоит из столбцов новых векторов. Рассмотрим далее другую ситуацию.

2. Найти матрицу перехода из базиса $\mathbf{Б}'$ в базис $\mathbf{Б}''$:

$$\mathbf{Б}' = \left\{ e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{Б}'' = \left\{ e_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3'' = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

В данном случае разложение «новых» базисных векторов e_i'' по «старому» базису e_j' не очевидно. Но тогда нужно решать три системы линейных уравнений с неизвестными t_{ji} — элементами матрицы перехода $T_{\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}''}$:

$$e_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t_{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_{21} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_{31} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_2'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_{12} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_{22} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_{32} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_3'' = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = t_{13} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_{23} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_{33} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что все СЛУ имеют одинаковую матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и отличаются лишь столбцами свободных. Поэтому есть возможность решать одновременно три СЛУ методом Гаусса *построчных* элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \ldots$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 1,5 & 4,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow T_{\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}''} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 1,5 & 4,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. 1. В ЛП $\mathbb{R}^n$ нельзя путать столбец как элемент $\mathbb{R}^n$ и столбец координат данного элемента-столбца! В разобранном примере для элемента $e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем следующие столбцы координат в базисах **Б**, **Б**$'$ и **Б**$''$:

$$[e_1']_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[e_1']_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[e_1']_{\mathbf{Б}''} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Столбец совпадает со своими координатами только в каноническом базисе.

2. Получен алгоритм вычисления матрицы перехода из базиса **Б** в базис **Б**$'$, если элементы базисов — столбцы из $\mathbb{R}^n$ (или координатные столбцы базисных векторов в фиксированном третьем базисе $\mathbf{Б}_0$):

1) составить матрицу из столбцов базиса **Б** слева и **Б**$'$ справа;

2) построчными преобразованиями привести левую матрицу к единичной, тогда справа будет искомая матрица перехода

$$\left(\mathbf{Б} \middle| \mathbf{Б}'\right) \rightarrow \left(\mathbf{E} \middle| T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'}\right). \tag{1.8}$$

1.4. Подпространства

В этом разделе будут изложены лишь основные понятия и свойства подпространств. Более подробное изложение, близкое к данному тексту, см. в работе Ю. Б. Мельникова «Алгебра и теория чисел» [11].

1.4.1. *Определение и свойства подпространств*

Продолжая изучать линейные пространства, заметим, что не всякое подмножество из ЛП является ЛП. В этом разделе будем рассматривать те подмножества, которые наследуют структуру ЛП.

Определение 1.4.1. *Подмножество V линейного пространства U называется* **подпространством** *в U, если V является линейным пространством относительно тех же операций. Обозначение: $V \leq U$.*

Теорема 1.4.1 (критерий подпространства). *Подмножество V из ЛП U над полем* $\mathbf{K}$ *является подпространством тогда и только тогда, когда линейные операции ЛП U замкнуты в V :*

$$V \leq U \;\Leftrightarrow\; \left(\forall x, y \in V \quad \forall \lambda \in K \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \lambda x \in V \\ x + y \in V \end{array} \right. \right). \tag{1.9}$$

Можно переформулировать теорему в эквивалентной форме

$$V \leq U \;\Leftrightarrow\; \left(\forall x, y \in V \quad \forall \lambda, \mu \in K \;\Rightarrow\; \lambda x + \mu y \in V \right). \tag{1.10}$$

Доказательство. Понятно, что если V — подпространство ($V \leq U$), то операции из U замкнуты в V, иначе они не являются операциями на V и тогда определение ЛП для V не выполняется.

Обратное утверждение: если операции замкнуты в V, то , следуя определению ЛП, надо проверить выполнение аксиом линейного пространства для V. Но эта проверка тривиальна, так как, например, равенство $x + y = y + x$ верно *для любых* векторов $x, y \in U$ и оно, конечно, останется верным и в случае, когда x, y будут выбираться не из «всего U», а только «из его части», из V. Теорема доказана.

Теорема 1.4.2 (о размерности подпространства). *Пусть V — подпространство ЛП U. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\dim(V) \leq \dim(U)$*;*

2) $\dim(V) < \dim(U)$ *тогда и только тогда, когда $V < U$, то есть $V \neq U$.*

Доказательство. Это следствие из теоремы 1.2.4 о дополняемости до базиса. Действительно, если **Б** — базис ЛП V, то его можно, как любую ЛНС, дополнить до базиса **Б**$'$ ЛП U. Иными словами, число векторов в **Б** не более, чем в **Б**$'$. Первое утверждение доказано.

Если $V < U$, то найдется вектор $x \in U \setminus V$. Но тогда x не может быть линейной комбинацией базисных векторов **Б** ЛП V. По критерию линейной зависимости 1.1.2 система векторов $\{x, \mathbf{Б}\}$ независима и в базисе **Б**$'$ ЛП U число векторов минимум на единицу больше. И обратно: если $\dim(V) < \dim(U)$, то в базисе $\mathbf{Б}'$ ЛП U число векторов минимум на единицу больше и найдется вектор x такой, что система векторов $\{x, \mathbf{Б}\}$ независима. Таким образом, x не может быть линейной комбинацией базисных векторов $\mathbf{Б}$ из ЛП V, поэтому $x \in U \setminus V$. Второй пункт доказан.

Заметим, что в любом ЛП U *тривиальными* подпространствами являются само ЛП U и нулевое подпространство, состоящее из одного нулевого вектора. Остальные подпространства называются *собственными.*

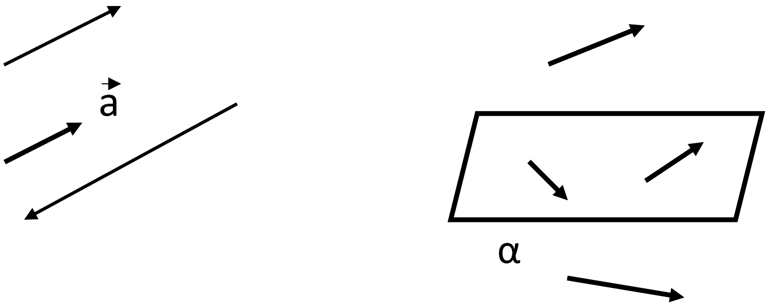

Рис. 1.1. Подпространства в V^3

Пример 1.4.1 (подпространства в V^3). В ЛП V^3 направленных отрезков все векторы, коллинеарные фиксированному вектору $\vec{a}$, образуют одномерное подпространство. Понятно, что таких подпространств бесконечно много. С другой стороны, все векторы, параллельные фиксированной плоскости α, также образуют подпространство размерности два. Проверка того, что указанные подмножества — подпространства, делается по теореме 1.4.1. Не надо путать геометрический объект плоскость (или прямая) с подпространством векторов, параллельных этой плоскости. Параллельные плоскости различны, а множество векторов, им параллельное, одинаково.

Пример 1.4.2 (подпространства в $\mathbb{R}^3$). Поскольку $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, размерности собственных подпространств либо 1, либо 2.

1. Множество V вектор-столбцов, пропорциональных фиксированному столбцу $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $V = \left\{ x \middle| x = \lambda a = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \le \mathbb{R}^3$, образует подпространство (теорема 1.4.1) размерности 1 с базисом $\{a\}$.

Множество $W = \left\{ x \middle| x = \lambda_1 a + \lambda_2 b = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \le \mathbb{R}^3$

есть подпространство (по теореме 1.4.1) размерности 2 с базисом $\{a, b\}$.

2. Выведем признак принадлежности вектор-столбца $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ рассмотренному подпространству W с базисом $\{a, b\}$. Имеем $x \in W \;\Leftrightarrow\; x = \lambda_1 a + \lambda_2 b$, и по теореме 1.1.2 система $\{a, b, x\}$ линейно зависима.

По критерию линейной зависимости в $\mathbb{R}^n$ (теорема 1.2.7) получим следующие утверждения о рангах матриц, составленных из столбцов x, a, b :

$$\left.\begin{array}{r} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 2 & x_2 \\ 3 & 1 & x_3 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Rg}(C) < 3 \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Rg}(B) = 2 \\ \mathrm{Rg}(B) \le \mathrm{Rg}(C) \end{array}\right\} \Rightarrow \ \mathrm{Rg}(B) = \mathrm{Rg}(C) = 2.$$

Но элементарные преобразования не меняют ранг матрицы. Проведем построчные преобразования матрицы A, получая нулевые строки в матрице B :

$$C = \left(B \middle| x\right) = \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 2 & x_2 \\ 3 & 1 & x_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - 3x_1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -2(x_3 - 3x_1) + x_2 - 2x_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 4x_1 + x_2 - 2x_3 \end{array}\right).$$

Преобразования закончены, так как ранг матрицы B вычислен. Теперь можно сформулировать признак принадлежности элемента x подпространству W :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W = \left\{ x \middle| x = \lambda_1 a + \lambda_2 b \right\} \Leftrightarrow \mathrm{Rg}(C) = \mathrm{Rg}(B) \Leftrightarrow 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Другими словами, компоненты x_i столбца x должны удовлетворять однородной СЛУ, в данном случае состоящей из одного уравнения.

1.4.2. *Способы задания подпространств*

Определение 1.4.2. Линейная оболочка *системы векторов $\mathcal{A}$ из ЛП U над полем* $\mathbf{K}$ *(обозначение: $\langle \mathcal{A} \rangle$) есть множество*

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \left\{ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbf{K}, a_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Теорема 1.4.3 (о линейной оболочке). *Линейная оболочка $\langle \mathcal{A} \rangle$ системы векторов $\mathcal{A}$ из ЛП U над полем* $\mathbf{K}$ *есть подпространство в U.*

Доказывается теорема по критерию подпространства 1.4.1.

Замечание. Всякое ЛП есть линейная оболочка своего базиса.

Напомним, что каждый элемент пространства может описываться «внутренним» образом: например, вектор — направленный отрезок $\vec{x}$ имеет единичную длину и перпендикулярен оси Ox. Но тот же направленный отрезок может быть однозначно задан в данной декартовой системе координат xOy своим столбцом координат: $[\vec{x}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Соответственно признаки принадлежности данного вектора x некоторому подпространству V из ЛП U будут выглядеть по-разному.

Рассмотрим **два способа задания подпространства** V в ЛП U над полем $\mathbb{R}$, если $\dim U = n$.

- Задание V в виде *линейной оболочки системы векторов* (желательно базисных) — внутренняя характеризация элементами из U:

$$x \in V = \langle v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k \rangle \ \Leftrightarrow\ x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k.$$

- Задание V *с помощью системы однородных линейных уравнений* в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейного пространства U — характеризация координатными столбцами из $\mathbb{R}^n$ (ОСЛУ зависит от базиса $\mathbf{Б}$):

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in V \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ A \cdot [\vec{x}]_{\mathbf{Б}} = O_{m\times 1},\ (a_{ij})_{m\times n} = A,\ O_{m\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ [\vec{x}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Переход от задания подпространства в виде линейной оболочки системы векторов к заданию в виде ОСЛУ в базисе Б

1. Пусть
$$V = \langle v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\rangle \le U,\ \ \dim U = n,$$
и можно считать, что векторы $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$ линейно независимы.

2. В ЛП U выберем базис **Б** и вычислим координаты в нем векторов $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$: $[v_1]_{\mathbf{Б}},\ [v_2]_{\mathbf{Б}},\ \ldots,\ [v_k]_{\mathbf{Б}}$.

3. В пространстве столбцов координат $\mathbb{R}^n$ подпространству V соответствует линейная оболочка
$$V' = \left\langle [v_1]_{\mathbf{Б}},\ [v_2]_{\mathbf{Б}},\ \ldots,\ [v_k]_{\mathbf{Б}}\right\rangle,\ \ x \in V\ \Leftrightarrow\ [x]_{\mathbf{Б}} \in V'.$$

4. Если некоторой ОСЛУ $AX = O$ удовлетворяют только линейно независимые столбцы $[v_i]_{\mathbf{Б}}$ и их линейные комбинации, тогда эта система столбцов образует ФСР данной ОСЛУ. Значит, в ЛП $\mathbb{R}^n$ задача формулируется так: по известной ФСР $[v_1]_{\mathbf{Б}},\ [v_2]_{\mathbf{Б}},\ \ldots,\ [v_k]_{\mathbf{Б}}$ найти матрицу ОСЛУ A.

Один из возможных алгоритмов нахождения ОСЛУ был рассмотрен в пункте 2 примера 1.4.2. В общем виде
$$x \in V\ \Leftrightarrow\ [x]_{\mathbf{Б}} \in V'\ \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{теор. 1.1.2}}\ [v_1]_{\mathbf{Б}},\ [v_2]_{\mathbf{Б}},\ \ldots,\ [v_k]_{\mathbf{Б}}, [x]_{\mathbf{Б}} - \text{линейно зависима}$$
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{теор. 1.2.7}}\ \mathrm{Rg}\,\underbrace{\left([v_1]_{\mathbf{Б}}[v_2]_{\mathbf{Б}}\ldots[v_k]_{\mathbf{Б}}[x]_{\mathbf{Б}}\right)}_{=C} = \mathrm{Rg}\,\underbrace{\left([v_1]_{\mathbf{Б}}[v_2]_{\mathbf{Б}}\ldots[v_k]_{\mathbf{Б}}\right)}_{=B}.$$
Построчными преобразованиями матрицы $C = \left(B\middle|[x]_{\mathbf{Б}}\right)$ получаем нулевые строки в ее части B. Каждой нулевой строке в B соответствует однородное линейное уравнение относительно x_i, стоящее в последнем столбце C; ОСЛУ $A[x]_{\mathbf{Б}} = O$ собирается из этих уравнений, когда ранг матрицы B полностью вычислен.

Переход от задания подпространства в виде ОСЛУ в базисе Б к заданию в виде линейной оболочки системы векторов

1. Решить ОСЛУ $AX = O$ и выделить ее ФСР $[v_1]_{\mathbf{Б}},\ [v_2]_{\mathbf{Б}},\ \ldots,\ [v_k]_{\mathbf{Б}}$.

2. По координатным столбцам восстановить векторы как элементы V :
$$[v_i]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} \\ \ldots \\ \lambda_{in} \end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ v_i = \lambda_{i1}e_1 + \ldots + \lambda_{in}e_n.$$

3. Задать V как линейную оболочку:
$$V = \langle v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\rangle\,.$$

1.4.3. *Алгебра подпространств*

Теорема 1.4.4 (о пересечении подпространств). *Пусть V, W — подпространства ЛП U над полем K. Тогда пересечение $V \cap W$ подпространств V и W (как множеств) является подпространством*

$$\begin{cases} V \leq U \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \; V \cap W \leq V.$$

Доказательство. Это очевидное следствие 1.4.1 критерия подпространства. Действительно, пусть $x \in V \cap W$, $y \in V \cap W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда $\lambda x + \mu y \in V$, так как $x, y \in V$, и $\lambda x + \mu y \in W$, так как $x, y \in W$. Следовательно, $\lambda x + \mu y$ принадлежит и V, и W, поэтому, по определению пересечения множеств, $\lambda x + \mu y \in V \cap W$. Теорема доказана.

Определение 1.4.3. *Пусть V, W — подпространства ЛП U над полем K.* **Суммой подпространств** *V и W называется множество*

$$V + W = \left\{ v + w \,\middle|\, v \in V, w \in W \right\}.$$

Теорема 1.4.5 (о сумме подпространств). *Сумма подпространств является подпространством*

$$\begin{cases} V \leq U \\ W \leq U \end{cases} \Rightarrow \; V + W \leq V.$$

Доказательство. По критерию подпространства 1.4.1:
пусть $v_1 + w_1 \in V + W$, $v_2 + w_2 \in V + W$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда
$\lambda \left(v_1 + w_1\right) + \mu \left(v_2 + w_2\right) = \underbrace{\left(\lambda v_1 + \mu v_2\right)}_{\in V} + \underbrace{\left(\lambda w_1 + \mu w_2\right)}_{\in W} \in V + W.$

Теорема доказана.

Замечание. Если подпространства V и W из ЛП U заданы как линейные оболочки систем векторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то сумма $V + W$ есть линейная оболочка объединения $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$:

$$V = \langle \mathcal{A} \rangle, \; W = \langle \mathcal{B} \rangle \; \Rightarrow \; V + W = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle.$$

Это утверждение следует из определений линейной оболочки 1.4.2 и суммы подпространств 1.4.3.

Теорема 1.4.6 (о размерности суммы подпространств). *Пусть V, W — подпространства конечномерного ЛП U над полем K. Тогда*

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

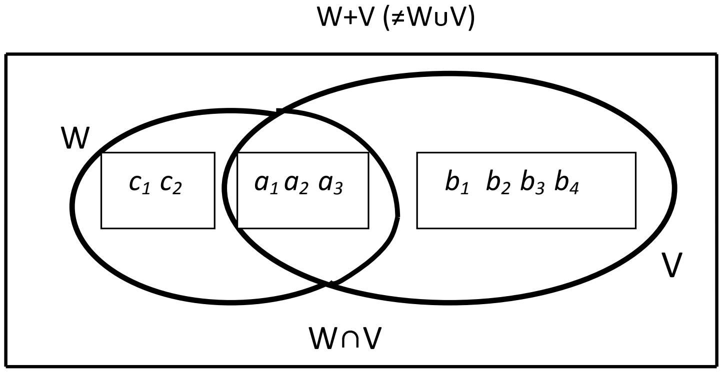

Рис. 1.2. Построение базиса в $V+W$

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б}_{V\cap W}=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ — базис подпространства $V\cap W$. Дополним его до базиса ЛП V (что возможно по теореме 1.2.4), получим базис $\mathbf{Б}_V=\{a_1,a_2,\ldots,a_k,b_1,b_2,\ldots,b_p\}$. Теперь дополним базис $\mathbf{Б}_{V\cap W}$ до базиса линейного пространства W, получим базис $\mathbf{Б}_W=\{a_1,a_2,\ldots,a_k,c_1,c_2,\ldots,c_q\}$ (рис.1.2). Чтобы проверить, является ли система $\mathbf{Б}_{V+W}=\{a_1,a_2,\ldots,a_k,b_1,b_2,\ldots,b_p,c_1,c_2,\ldots,c_q\}$ базисом суммы $V+W$, нужно убедиться в том, что, во-первых, эта система векторов линейно независима, и, во-вторых, что всякий вектор из $V+W$ представляется линейной комбинацией векторов из $\mathbf{Б}_{V+W}$. Оба утверждения очевидны и их доказательства подробно расписывать не будем. Теорема доказана.

Теорема 1.4.7 (о вычислении суммы и пересечения подпространств). *Если* $\mathbf{Б}=\{e_1,\ldots,e_n\}$ *— базис линейного пространства* U *и*

$$V=\langle v_1,\ldots,v_k,\ldots\rangle=\left\{x_1e_1+\ldots+x_ne_n\;\middle|\;\left\{\begin{array}{r}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ \ldots\\ a_{p1}x_1+\ldots+a_{pn}x_n=0\end{array}\right.\right\},$$

$$W=\langle w_1,\ldots,w_m,\ldots\rangle=\left\{x_1e_1+\ldots+x_ne_n\;\middle|\;\left\{\begin{array}{r}b_{11}x_1+\ldots+b_{1n}x_n=0\\ \ldots\\ b_{q1}x_1+\ldots+b_{qn}x_n=0\end{array}\right.\right\}$$

подпространства линейного пространства U, *то*

$$V+W=\langle v_1,\ldots,v_n,\ldots,w_1,\ldots,w_m,\ldots\rangle\,, \tag{1.11}$$

$$V \cap W = \left\{ x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qn}x_n = 0 \end{array} \right. \right\}. \tag{1.12}$$

Замечание. 1. Чтобы задать сумму $V + W$ подпространств V и W, удобнее иметь описание ЛП в виде линейных оболочек:

$$V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle, \quad W = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle \;\Rightarrow\; V + W = \langle v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \rangle.$$

2. Чтобы задать пересечение $V \cap W$ подпространств V и W, удобнее иметь описание ЛП в виде СЛУ (в одинаковом базисе **Б**!):

$$\begin{array}{l} V: \left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{array} \right. \\ W: \left\{ \begin{array}{r} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qn}x_n = 0 \end{array} \right. \end{array} \;\Rightarrow\; V \cap W: \left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \\ b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ b_{q1}x_1 + \ldots + b_{qn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Определение 1.4.4. *Если V, W — подпространства линейного пространства U над полем K и $V \cap W = \{\Theta\}$. Тогда сумма $V + W$ подпространств V и W называется* **прямой суммой**. *Прямая сумма подпространств обозначается через $V \oplus W$.*

Теорема 1.4.8 (критерий прямой суммы подпространств). *Пусть V, W — подпространства ЛП U над полем K. Тогда сумма $V + W$ является прямой суммой тогда и только тогда, когда всякий вектор из $V + W$ однозначным образом представляется в виде $v + w$, где $v \in V$, $w \in W$.*

Следствие. $U = V \oplus W$, тогда и только тогда, когда

$$\dim U = \dim V + \dim W = \dim(V + W).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определения линейного пространства, линейно зависимых и независимых систем векторов.

2. Сформулируйте определения базиса и размерности линейного пространства, координат вектора в данном базисе.

3. Сформулируйте определение матрицы перехода из базиса в базис, приведите формулу связи координат вектора в разных базисах. Перечислите свойства матрицы перехода.

4. Сформулируйте признак линейной зависимости векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$.

5. Сформулируйте определение и признак подпространства.

6. Сформулируйте определения суммы и пересечения подпространств. Сформулируйте теорему о размерности суммы подпространств.

7. Сформулируйте определение линейной оболочки системы векторов. Задание подпространства с помощью однородной системы линейных уравнений. Переход от одной формы описания подпространства к другой.

Глава 2

Линейные операторы

Напомним, что в курсе математического анализа изучается сначала множество действительных чисел, а затем – функции на этом множестве. В такой же логике мы выстраиваем и курс линейной алгебры. В предыдущей главе изучалось линейное пространство, в данной главе рассмотрим функции на ЛП. Однако не все возможные функции будут нас интересовать, а только *линейные*.

2.1. Основные понятия

2.1.1. *Определение и примеры линейного оператора*

Определение 2.1.1. *Пусть U и V — линейные пространства над полем K.* **Линейным оператором** *из ЛП U в ЛП V называется функция $\hat{A}:\ U \to V$ такая, что для любых векторов $x, y \in U$ и любых скаляров $\lambda, \mu \in K$ имеет место равенство $\hat{A}\,(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y)$.*

В этом курсе в основном рассматривается частный случай, когда $U = V$.

Определение 2.1.2. Линейным оператором *линейного пространства U над полем K называется функция $\hat{A}:\ U \to U$ такая, что*

$$\forall x, y \in U, \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \hat{A}\,(\lambda x + \mu y) = \lambda \hat{A}(x) + \mu \hat{A}(y) \tag{2.1}$$

или, в эквивалентной форме

$$\forall x, y \in U, \quad \forall \lambda, \mu \in K \begin{cases} \hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}(x), \\ \hat{A}(x+y) = \hat{A}(x) + \hat{A}(y). \end{cases} \tag{2.2}$$

Как видим, преобразование (функция) на ЛП является линейным оператором, если, по определению, оно «сохраняет» линейные операции — сложение и умножение на число. Далее приведем примеры линейных операторов (сокращенно ЛО).

Пример 2.1.1 (линейные операторы в V^2 и в V^3). В геометрическом ЛП линейные операторы есть геометрические преобразования плоскости V^2 или пространства V^3. Но не все преобразования являются ЛО.

1. Поворот плоскости V^2 на угол φ (рис. 2.1, а). Точнее:

$$\hat{A}_\varphi : \ V^2 \to V^2 \ \Leftrightarrow \ \hat{A}_\varphi(\vec{x}) = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{y}| = |\vec{x}| \\ (\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \varphi \end{cases} .$$

Конечно, в случае $\varphi > 0$ поворот происходит против часовой стрелки, в случае $\varphi < 0$ — по часовой стрелке. Это преобразование плоскости — ЛО. Действительно, проверяя равенства (2.2), имеем $\hat{A}_\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}_\varphi(\vec{x})$. Равенство верно, поскольку результат не зависит от того, что сделать сначала: растянуть вектор $\vec{x}$ в λ раз и потом повернуть или наоборот. Такое же рассуждение годится и для проверки второго равенства: $\hat{A}_\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}_\varphi(\vec{x}) + \hat{A}_\varphi(\vec{y})$.

2. Ортогональная проекция векторов ЛП V^3 (или V^2) на направление вектора $\vec{a}$ (рис. 2.1, б). Дадим определение ортогональной проекции и приведем формулу для ее вычисления через скалярное произведение векторов (обозначение $(\vec{a}, \vec{b})$):

$$\hat{P}_{\vec{a}} : \ V^3 \to V^3 \ \Leftrightarrow \ \hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{x}})| \\ 0 \le (\widehat{\vec{a}, \vec{x}}) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{y} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ \frac{\pi}{2} < (\widehat{\vec{a}, \vec{x}}) \le \pi \Rightarrow \vec{y} \uparrow\downarrow \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{(\vec{a}, \vec{x})}{(\vec{a}, \vec{a})}\vec{a}. \tag{2.3}$$

Проекция является ЛО. Проверка линейности, т. е. равенств (2.2), имеет геометрический характер.

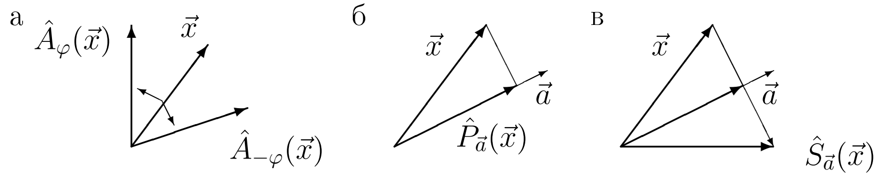

Рис. 2.1. Геометрические ЛО: а – поворот в плоскости на угол φ ($\varphi > 0$); б – ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на ось вектора $\vec{a}$; в – симметрия вектора $\vec{x}$ относительно оси вектора $\vec{a}$

3. Симметрия ЛП V^3 (или V^2) относительно прямой с направляющим вектором $\vec{a}$ (рис. 2.1, в). Симметричный вектору $\vec{x}$ вектор $\vec{y}$ строится через ортогональную проекцию $\vec{x}$ на направление вектора $\vec{a}$. Таким образом,

$$\hat{S}_{\vec{a}} : \ V^3 \to V^3 \ \Leftrightarrow \ \hat{S}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{y} \ \Leftrightarrow \ \vec{y} = 2 \cdot (\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}) - \vec{x}) + \vec{x} = 2 \cdot \hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}) - \vec{x}.$$

Получена формула

$$\hat{S}_{\vec{a}}(\vec{x}) = 2 \cdot \frac{(\vec{a}, \vec{x})}{(\vec{a}, \vec{a})}\vec{a} - \vec{x}. \tag{2.4}$$

Симметрия относительно прямой — ЛО.

4. Ортогональная проекция $\hat{P}_\pi$ векторов ЛП V^3 на плоскость π с нормальным вектором $\vec{n}$ (рис. 2.2, а). Формула проекции на плоскость выводится с помощью проецирования $\hat{P}_{\vec{n}}$ на направление вектора $\vec{n}$. В результате получим

$$\hat{P}_\pi(\vec{x}) = \vec{x} - \hat{P}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{(\vec{n}, \vec{n})}\vec{n}. \tag{2.5}$$

Преобразование $\hat{P}_\pi$ является ЛО.

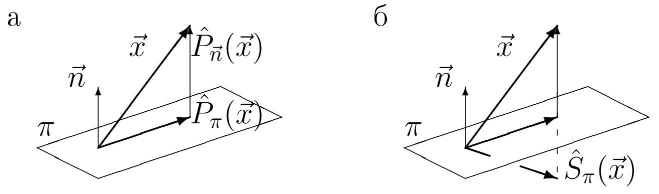

Рис. 2.2. Геометрические ЛО на V^3: а – ортогональная проекция вектора $\vec{x}$ на плоскость π с нормальным вектором $\vec{n}$; б – симметрия вектора $\vec{x}$ относительно плоскости π с нормальным вектором $\vec{n}$

5. Симметрия $\hat{S}_\pi$ векторов ЛП V^3 относительно плоскости π с нормальным вектором $\vec{n}$. Геометрический вывод формулы симметрии также можно проследить на рис. 2.2, б). В итоге

$$\hat{S}_\pi(\vec{x}) = \vec{x} - 2\hat{P}_{\vec{n}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{(\vec{n}, \vec{x})}{(\vec{n}, \vec{n})}\vec{n}. \tag{2.6}$$

Преобразование $\hat{S}_\pi$ является ЛО.

6. Параллельный перенос $\hat{A}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ векторов ЛП V^3 на ненулевой вектор $\vec{a}$ не является ЛО.

Пример 2.1.2 (линейные операторы на негеометрических ЛП).

1. Преобразование дифференцирования на ЛП $P_k(x)$ — многочленов степени не выше, чем k: $\hat{D}(f(x)) = f'(x),\ f(x) \in P_k(x)$.

2. Преобразование на ЛП матриц $M_{n\times n}$, определенное формулой $\hat{A}_{ST}(X) = S \cdot X \cdot T,\ X \in M_{n\times n}$, матрицы $S,\ T$ заданы.

3. Преобразование на арифметическом ЛП $\mathbb{R}^3$, определенное формулой
$$\hat{A}(X) = \hat{A}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$
$A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ — заданная матрица размерности 3×3.

Как видно из приведенных примеров, природа элементов ЛП определяет и преобразования данного ЛП. Но элементы любого ЛП могут описываться универсально — через координаты в данном базисе. Законно поставить вопрос об универсальном, «координатном», способе описания ЛО. Этому посвящен следующий раздел.

2.1.2. *Матрица линейного оператора*

Определение 2.1.3. *Если U — ЛП над полем K и $\hat{A}$ является линейным оператором линейного пространства U, то* **матрица оператора $\hat{A}$ в базисе Б** $= \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *определяется равенством*

$$\hat{A}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j, \ A_{\mathbf{Б}} = (a_{ji}) \Leftrightarrow A_{\mathbf{Б}} = ([\hat{A}(e_1)]_{\mathbf{Б}} \ldots [\hat{A}(e_n)]_{\mathbf{Б}}). \qquad (2.6)$$

Таким образом, i-м столбцом матрицы оператора в базисе **Б** *является столбец координат образа i-го базисного вектора из* **Б**, *вычисленный в* **Б**.

Запишем определение, более подробно расписывая все матрицы и используя обозначение столбцов координат (1.1):

$$A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = ([\hat{A}(e_1)]_{\mathbf{Б}}[\hat{A}(e_2)]_{\mathbf{Б}} \ldots [\hat{A}(e_n)]_{\mathbf{Б}});$$

$$\hat{A}(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \ \ldots, \ \hat{A}(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n;$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = [\hat{A}(e_1)]_{\mathbf{Б}}, \ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = [\hat{A}(e_2)]_{\mathbf{Б}}, \ \ldots, \ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = [\hat{A}(e_n)]_{\mathbf{Б}}.$$

Так же как для матрицы перехода (с. 30), можно сделать компактную матричную формулу, вводя матрицы-строки $\hat{A}(\mathbf{e})$ и $\mathbf{e}$, состоящие из векторов $\hat{A}(e_i)$ и

e_i соответственно:

$$\hat{A}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \hat{A}(e_1) & \dots & \hat{A}(e_n) \end{pmatrix} = \mathbf{e} \cdot \begin{pmatrix} \left[\hat{A}(e_1)\right]_{\mathbf{Б}} & \dots & \left[\hat{A}(e_n)\right]_{\mathbf{Б}} \end{pmatrix} = \mathbf{e} \cdot A_{\mathbf{Б}}.$$

Итак,

$$\hat{A}(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot A_{\mathbf{Б}}. \tag{2.7}$$

Используем ее для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2.1.1 (о координатах образа вектора). *Пусть U — ЛП над полем K, $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый базис этого пространства; $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Тогда для любого вектора $x \in U$ справедливо равенство*

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Прямое следствие из определений. В самом деле,

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}(x) = \mathbf{e} \cdot [\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}} \\ \hat{A}(x) = \hat{A}(\mathbf{e} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}) \underbrace{=}_{\text{линейность } \hat{A}} \hat{A}(\mathbf{e}) \cdot [x]_{\mathbf{Б}} \underbrace{=}_{(2.7)} (\mathbf{e} \cdot A_{\mathbf{Б}}) \cdot [x]_{\mathbf{Б}} = \mathbf{e} \cdot (A_{\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{в силу однозначности координат } [\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}}.$$

Теорема доказана.

Пример 2.1.3 (вычисление матрицы ЛО).

1. В пространстве V^2 задан базис $\mathbf{Б} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, причем $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$. Найдем матрицу ЛО ортогональной проекции на ось вектора $\vec{a}$ (рис.2.3, а): $\hat{P}_{\vec{a}}$, где $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, в базисе $\mathbf{Б}$. По определению матрицы ЛО, нужно найти координаты $[\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{i})]_{\mathbf{Б}}$ и $[\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{j})]_{\mathbf{Б}}$. Для этого подействуем оператором на $\vec{i}, \vec{j}$ и вычислим образы по формуле (2.3):

$$\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{i}) = \frac{(\vec{a}, \vec{i})}{(\vec{a}, \vec{a})}\vec{a} = \frac{|\vec{a}||\vec{i}| \cos\frac{\pi}{4}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2 \cdot 2}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \Rightarrow [\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{i})]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{j}) = \frac{(\vec{a}, \vec{j})}{(\vec{a}, \vec{a})}\vec{a} = \frac{|\vec{a}||\vec{j}| \cos\frac{\pi}{4}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2 \cdot 2}(\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \Rightarrow [\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{j})]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

В результате получили $P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Конечно, задача может быть решена геометрически через свойства прямоугольных треугольников, так как базис в данном случае удобно расположен по отношению к вектору $\vec{a}$. Но нахождение проекции на вектор $\vec{a}$ произвольного вектора $\vec{b}$ геометрически неудобно. С другой стороны, в базисе **Б** эта задача решена и через координаты $\vec{b}$ легко вычисляются координаты его проекции по формуле (2.8) из теоремы 2.1.1:

если $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$,то $[\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{b})]_{\mathbf{Б}} = P_{\mathbf{Б}} \cdot [\vec{b}]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \\ \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \end{pmatrix}$.

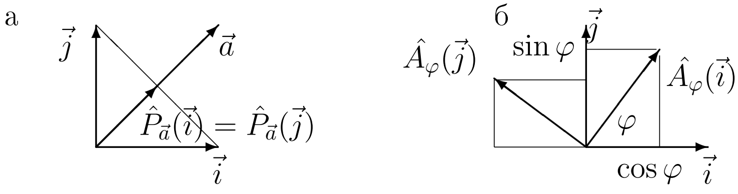

Рис. 2.3. Вычисление матрицы ЛО: а – ортогональной проекции $\hat{P}_{\vec{a}}$ на направление вектора $\vec{a}$; б – поворота $\hat{A}_\varphi$ на угол φ.

2. В пространстве V^2 задан базис $\mathbf{Б} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, причем $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$. Найдем матрицу ЛО поворота $\hat{A}_\varphi$ на угол φ. Координаты $[\hat{A}_\varphi(\vec{i})]_{\mathbf{Б}}$ и $[\hat{A}_\varphi(\vec{j})]_{\mathbf{Б}}$ находятся геометрически (рис.2.3, б):

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A}_\varphi(\vec{i}) = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \;\Rightarrow\; [\hat{A}_\varphi(\vec{i})]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ \hat{A}_\varphi(\vec{j}) = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \;\Rightarrow\; [\hat{A}_\varphi(\vec{j})]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

3. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ возьмем канонический базис
$\mathbf{Б} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ и вычислим матрицу ЛО $\hat{A}(X)$ в этом базисе, если

$\hat{A}(X) = \hat{A}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_3 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$. Действуем на базисные векторы оператором $\hat{A}$:

$$\hat{A}(e_1) = \hat{A}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 + 2\cdot 0 \\ -0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; \hat{A}(e_2) = \hat{A}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}(e_3) = \hat{A}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица вычислена.

Матрицы одного ЛО в разных базисах в общем случае конечно различны, но, очевидно, связаны между собой. В следующей теореме выводится формула такой связи.

Теорема 2.1.2 (о связи матриц оператора в разных базисах). *Пусть* U *— ЛП над полем* K, $\mathbf{Б}, \mathbf{Б}'$ *— базисы ЛП* U, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ *— матрица перехода из базиса* $\mathbf{Б}$ *в базис* $\mathbf{Б}'$, $\hat{A}$ *— линейный оператор пространства* U. *Тогда*

$$A_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot A_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}. \tag{2.10}$$

Доказательство. По теореме 1.3.2 о координатах вектора в разных базисах и теореме 2.1.1 о координатах образа вектора для любого вектора $x \in U$:

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}'} \underbrace{=}_{(1.6)} T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}} \underbrace{=}_{(2.8)}$$

$$= T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot A_{\mathbf{Б}} \cdot [x]_{\mathbf{Б}} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot A_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'}.$$

Итак,

$$[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot A_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'}.$$

С другой стороны, $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}'} = A_{\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'}$. получили равенство

$$T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot A_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'} = A_{\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'}.$$

Поскольку x — любой вектор, то

$$T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot A_{\mathbf{Б}} \cdot T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = A_{\mathbf{Б}'}.$$

Теорема доказана.

2.1.3. *Алгебра линейных операторов*

Как известно, функции, например действительные функции, можно складывать, умножать на коэффициенты и создавать сложные функции. ЛО — функция на ЛП, и на ЛП есть операции сложения и умножения на число. Значит, можно определить операции сложения, умножения на коэффициенты и умножения (в смысле создания сложных функций) на множестве линейных операторов, действующих на данном ЛП.

Определение 2.1.4. **Суммой операторов** $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *называется оператор* $\hat{A}+\hat{B}$, *определенный формулой*

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)(x)=\hat{A}(x)+\hat{B}(x). \tag{2.9}$$

Определение 2.1.5. **Произведением оператора** $\hat{A}$ **на скаляр** λ *называется оператор* $\lambda\hat{A}$, *определенный формулой*

$$\left(\lambda\hat{A}\right)(x)=\lambda\left(\hat{A}(x)\right). \tag{2.10}$$

Определение 2.1.6. **Произведением операторов** $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *называется оператор* $\hat{A}\cdot\hat{B}$, *определенный формулой*

$$\left(\hat{A}\cdot\hat{B}\right)(x)=\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right). \tag{2.11}$$

В соответствии с определением В.2 (см. с. 5) множество линейных операторов, действующих на данном ЛП, является алгеброй с определенными только что операциями.

Теорема 2.1.3 (об алгебре линейных операторов). *Пусть* $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *— линейные операторы ЛП* U. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) сумма $\hat{A}+\hat{B}$ *линейных операторов* $\hat{A}$ *и* $\hat{B}$ *есть линейный оператор;*

2) произведение $\lambda\hat{A}$ *линейного оператора на скаляр есть линейный оператор;*

3) произведение $\hat{A}\cdot\hat{B}$ *линейных операторов есть линейный оператор.*

Доказательство. Очевидное следствие из определения операций. Действительно, проверим, например, линейность произведения ЛО:

$$\forall\lambda,\mu\in K,\ \ \forall x,y\in U,\ (\hat{A}\cdot\hat{B})(\lambda x+\mu y)=\hat{A}(\hat{B}(\lambda x+\mu y))=\hat{A}(\lambda\hat{B}(x)+\mu\hat{B}(y))=$$

$$=\lambda\hat{A}(\hat{B}(x))+\mu\hat{A}(\hat{B}(y))=\lambda(\hat{A}\cdot\hat{B})(x)+\mu(\hat{A}\cdot\hat{B})(y).$$

Остальные утверждения проверяются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2.1.4 (о связи алгебры операторов и алгебры матриц). *Пусть* U *— ЛП над полем* K, $\mathbf{Б}$*—базис этого пространства. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $(\hat{A}+\hat{B})_{\mathbf{Б}}=A_{\mathbf{Б}}+B_{\mathbf{Б}}$;

2) $(\lambda\hat{A})_{\mathbf{Б}}=\lambda\cdot A_{\mathbf{Б}}$;

3) $(\hat{A}\cdot\hat{B})_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}}\cdot B_{\mathbf{Б}}$.

Доказательство. Проведем доказательство для суммы операторов, используя введенные ранее матричные обозначения (2.7):

$$\mathbf{e}\cdot(A_{\mathbf{Б}}+B_{\mathbf{Б}}) = \mathbf{e}\cdot A_{\mathbf{Б}} + \mathbf{e}\cdot B_{\mathbf{Б}} = \hat{A}(\mathbf{e}) + \hat{B}(\mathbf{e}) =$$

$$= (\hat{A}(e_1)\ldots\hat{A}(e_n)) + (\hat{B}(e_1)\ldots\hat{B}(e_n)) = (\hat{A}(e_1)+\hat{B}(e_1)\ldots\hat{A}(e_n)+\hat{B}(e_n)) =$$

$$\underbrace{=}_{\text{опред. } \hat{A}+\hat{B}} ((\hat{A}+\hat{B})(e_1)\ldots(\hat{A}+\hat{B})(e_n)) = (\hat{A}+\hat{B})(\mathbf{e}) \underbrace{=}_{\text{опред. матрицы ЛО}} \mathbf{e}\cdot(\hat{A}+\hat{B})_{\mathbf{Б}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{в силу однозначности координат } (\hat{A}+\hat{B})_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}} + B_{\mathbf{Б}}.$$

Теорема доказана.

Пример 2.1.4. В пространстве V^2 задан базис $\mathbf{Б} = \{\vec{i},\vec{j}\}$, причем $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$ и вектор $\vec{a} = \vec{i}+\vec{j}$. Требуется найти операторы $\hat{S} = \hat{A}_\varphi + \hat{P}_{\vec{a}}$ и $\hat{T} = \hat{A}_\varphi\cdot\hat{P}_{\vec{a}}$. Причем ЛО $\hat{A}_\varphi$ — поворот на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и ЛО $\hat{P}_{\vec{a}}$ — ортогональная проекция на направление вектора $\vec{a}$.

Геометрическое описание линейных операторов $\hat{S}$ и $\hat{T}$ достаточно громоздкое. Например, действие ЛО $\hat{T} = \hat{A}_\varphi\cdot\hat{P}_{\vec{a}}$ на каждый вектор $\vec{x}$ — это сначала проекция на $\vec{a}$, а затем образ $\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x})$ поворачивается на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Проще и конструктивнее описать ЛО $\hat{T}$ на координатном языке в некотором базисе. Другими словами, найдем матрицы ЛО $\hat{T}$ и $\hat{S}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{\vec{i},\vec{j}\}$. По теореме о связи алгебры операторов и алгебры матриц 2.1.4 для этого достаточно найти матрицы ЛО $\hat{A}_\varphi$ и ЛО $\hat{P}_{\vec{a}}$. Однако эти стандартные задачи были решены в примере 2.1.3. Итак, имеем

$$\left.\begin{array}{l} P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S_{\mathbf{Б}} = P_{\mathbf{Б}} + A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ T_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}}\cdot P_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Такое алгебраическое описание ЛО позволяет найти образ любого вектора $\vec{x}$ по его координатам в базисе $\mathbf{Б}$ с помощью формулы $[\hat{S}(\vec{x})]_{\mathbf{Б}} = S_{\mathbf{Б}}\cdot[\vec{x}]_{\mathbf{Б}}$. Значит, задача решена и оператор найден.

2.2. Подпространства, связанные с линейным оператором

2.2.1. *Ядро и образ линейного оператора*

Определение 2.2.1. Ядром *линейного оператора* $\hat{A}$ *ЛП* U *(обозначение*

$\operatorname{Ker}\hat{A}$) *называется множество всех векторов x из U, образ которых под действием оператора $\hat{A}$ — нулевой вектор ЛП U.* **Образ** *линейного оператора (обозначение $\mathrm{Im}\hat{A}$ или $\hat{A}(U)$) относительно действия $\hat{A}$ — множество всех векторов вида $\hat{A}(x)$.*

$$\operatorname{Ker}\hat{A} = \left\{x \mid \hat{A}(x) = \Theta\right\}, \quad \mathrm{Im}\hat{A} = \hat{A}(U) = \left\{y \mid y = \hat{A}(x),\ x \in U\right\}. \qquad (2.12)$$

Теорема 2.2.1 (о ядре и образе линейного оператора). *Ядро и образ линейного оператора $\hat{A}: U \mapsto U$ являются подпространствами линейного пространства U.*

Доказательство. Достаточно проверить критерий подпространства (теорема 1.4.1):

$$\begin{cases} x \in \operatorname{Ker}\hat{A}, \\ y \in \operatorname{Ker}\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}(x) = \Theta, \\ \hat{A}(y) = \Theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{\hat{A}(x)}_{\Theta} + \mu \underbrace{\hat{A}(y)}_{\Theta} = \Theta \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \operatorname{Ker}\hat{A}.$$

$$\begin{cases} x \in \mathrm{Im}\hat{A}, \\ y \in \mathrm{Im}\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \exists x_1, y_1 \in U : \begin{cases} \hat{A}(x_1) = x, \\ \hat{A}(y_1) = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda\hat{A}(x_1) + \mu\hat{A}(y_1) = \hat{A}(\lambda x_1 + \mu y_1) \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \mathrm{Im}\hat{A}.$$

Теорема доказана.

Определение 2.2.2. *Размерность ядра оператора $\hat{A}$ называется* **дефектом** *линейного оператора (обозначение $\mathrm{d}(\hat{A})$). Размерность образа линейного оператора $\hat{A}$ называется* **рангом** *линейного оператора $\hat{A}$ (обозначение $\mathrm{Rg}(\hat{A})$).*

$$\mathrm{d}(\hat{A}) = \dim\operatorname{Ker}\hat{A}, \quad \mathrm{Rg}(\hat{A}) = \dim\mathrm{Im}\hat{A}.$$

Теорема 2.2.2 (о ранге линейного оператора). *Если $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе* **Б** *линейного пространства U, то $\mathrm{Rg}(A_{\mathbf{Б}}) = \mathrm{Rg}(\hat{A})$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис ЛП U.

По определению базиса всякий вектор есть линейная комбинация базисных векторов:

$$\forall x \in U \quad x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Тогда в силу линейности оператора $\hat{A}$:

$$\hat{A}(x) = x_1\hat{A}(e_1) + \ldots + x_n\hat{A}(e_n).$$

Что, по определению линейной оболочки, означает

$$\hat{A}(U) =< \hat{A}(e_1), \ldots, \hat{A}(e_n) > .$$

И если $\mathbf{Б}_0 = \left\{\hat{A}\left(e_{i_1}\right), \ldots, \hat{A}\left(e_{i_r}\right)\right\}$ — максимальная линейно независимая подсистема (МЛНС) системы векторов $\mathbf{Б} = \left\{\hat{A}\left(e_1\right), \ldots, \hat{A}\left(e_n\right)\right\}$, то

$$\hat{A}(U) =< \hat{A}(e_1), \ldots, \hat{A}(e_n) >=< \hat{A}\left(e_{i_1}\right), \ldots, \hat{A}\left(e_{i_r}\right) >$$

и $\mathbf{Б}_0$ является базисом линейного пространства $\hat{A}(U)$.

В силу теоремы 1.2.6 о линейной зависимости в координатах система столбцов координат $\left\{[\hat{A}\left(e_{i_1}\right)]_{\mathbf{Б}}, \ldots, [\hat{A}\left(e_{i_r}\right)]_{\mathbf{Б}}\right\}$ является МЛНС для системы столбцов, составляющих матрицу оператора $A_{\mathbf{Б}}$: $\left\{[\hat{A}\left(e_1\right)]_{\mathbf{Б}}, \ldots, [\hat{A}\left(e_n\right)]_{\mathbf{Б}}\right\}$, т. е.

$$\mathrm{Rg}(A_{\mathbf{Б}}) = r = \dim \hat{A}(U) = \mathrm{Rg}(\hat{A}).$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2.3 (о сумме ранга и дефекта линейного оператора). *Для любого линейного оператора $\hat{A}$ линейного пространства U имеет место равенство* $\mathrm{Rg}(\hat{A}) + \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim U$.

Теорему примем без доказательства.

Замечание. Утверждение теоремы о размерностях подпространств не означает, что пространство U раскладывается в сумму ядра и образа линейного оператора. Действительно, рассмотрим в качестве $\hat{A}$ произведение оператора $\hat{P}$ поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки на оператор $\hat{Q}$ проецирования плоскости на ось Ox: $\hat{A}(\vec{x}) = \hat{P}\left(\hat{Q}(\vec{x})\right)$. Ядро оператора $\hat{A}$ совпадает с осью Oy (то есть состоит из всех векторов, коллинеарных оси Oy). Образ пространства: $\hat{A}(U) = \hat{P}\left(\hat{Q}(U)\right)$ тоже совпадает с осью Oy, то есть с $\mathrm{Ker}\,\hat{A}$. Получилось $\hat{A}(U) = \mathrm{Ker}\,\hat{A}$, но равенство $\mathrm{Rg}(\hat{A}) + \mathrm{d}(\hat{A}) = 1 + 1 = 2 = \dim U$ выполняется.

Как для всякой функции, для любого ЛО можно поставить вопрос о существовании обратной к нему функции. Ответ на этот вопрос связан с видом ядра ЛО.

Определение 2.2.3. *Линейный оператор $\hat{A}$ называется* **невырожденным** *тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,\hat{A} = \{\Theta\}$, в противном случае, ЛО $\hat{A}$ называется* **вырожденным**.

Определение 2.2.4. *Линейный оператор* $\hat{A}^{-1}$ *называется* **обратным** *к оператору* $\hat{A}$ *тогда и только тогда, когда имеют место равенства* $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$ *и* $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{E}$. *Где* $\hat{E}$ *— тождественный оператор, т. е.* $\forall x \in U \quad \hat{E}(x) = x$.

Следует отметить, что термин «обратный» обусловлен тем, что линейный оператор $\hat{A}^{-1}$ является обратной к $\hat{A}$ функцией.

Теорема 2.2.4 (критерий невырожденности оператора). *Линейный оператор* $\hat{A}$ *невырожденный тогда и только тогда, когда он обратим.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ЛО $\hat{A}$ невырожденный. Тогда, по определению 2.2.3, $\operatorname{Ker}\hat{A} = \{\Theta\}$ и $\dim\operatorname{Ker}\hat{A} = 0$. По теореме 2.2.3 о сумме ранга и дефекта имеем

$$\dim\operatorname{Ker}\hat{A} + \dim\operatorname{Im}\hat{A} = 0 + \dim\operatorname{Im}\hat{A} = \dim U \;\Leftrightarrow\; \dim\operatorname{Im}\hat{A} = \dim U.$$

Тогда, по теореме 2.2.2, если $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе **Б** линейного пространства U, то

$$\operatorname{Rg}(A_{\mathbf{Б}}) = \operatorname{Rg}(\hat{A}) = \dim\operatorname{Im}\hat{A} = \dim U.$$

Но если ранг матрицы равен ее размерности, то она невырожденная, т. е. существует к ней обратная $A_{\mathbf{Б}}^{-1}$. Оператор $\hat{A}^{-1}$, определяемый матрицей $A_{\mathbf{Б}}^{-1}$, в силу теоремы о связи алгебры ЛО и алгебры матриц 2.1.4, обладает нужными свойствами:

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{E}.$$

Достаточность. Если оператор $\hat{A}$ обратим, то существует к нему обратный $\hat{A}^{-1}$. Снова применяя теорему 2.1.4, получим, что матрица $A_{\mathbf{Б}}$ обратима и, значит, $\operatorname{Rg}(A_{\mathbf{Б}}) = \dim U$ и $\operatorname{Ker}\hat{A} = \{\Theta\}$.

Теорема доказана.

В следующей теореме перечисляются свойства вырожденных операторов. Приведем ее без доказательства.

Теорема 2.2.5 (признаки вырожденности оператора). *Пусть* $\hat{L}$ *— линейный оператор линейного пространства* U, **Б** *— базис линейного пространства* U. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\hat{L}$ *— вырожденный оператор;* *2)* $\operatorname{Ker}\hat{L} \neq \{\Theta\}$*;*

3) $\mathrm{d}(\hat{L}) \neq 0$*;* *4)* $\operatorname{Rg}(\hat{L}) < \dim U$*;*

5) $\operatorname{Rg}\left(\,L_{\mathbf{Б}}\right) < \dim U$*;* *6) определитель* $\left|\,L_{\mathbf{Б}}\right| = 0$*;*

7) существует линейно независимая система векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ *такая, что система* $\left\{\hat{L}(u_1), \hat{L}(u_2), \ldots, \hat{L}(u_k)\right\}$ *линейно зависима;*

8) $\hat{L}(U) < U$*, то есть* $\hat{L}(U) \neq U$.

2.2.2. *Инвариантные подпространства*

Определение 2.2.5. *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор ЛП* U*. Подпространство* V *из ЛП* U *называется* $\hat{A}$**-инвариантным подпространством**, *если для любого вектора* $x \in V$ *имеет место включение* $\hat{A}(x) \in V$*.*

Очевидно, определение можно записать так:

$$V \leq U,\ V - \hat{A}\text{-инвариантное} \ \Leftrightarrow\ \forall x \in V\ \hat{A}(x) \in V \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Im}\hat{A} = \hat{A}\,(V) \leq V.$$

Иными словами, оператор $\hat{A}$ ни один из векторов подпространства V не «выбрасывает наружу», «за пределы» подпространства V.

Теорема 2.2.6 (об алгебре инвариантных подпространств). *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор ЛП* U*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) сумма $\hat{A}$*-инвариантных подпространств является* $\hat{A}$*-инвариантным подпространством;*

2) пересечение $\hat{A}$*-инвариантных подпространств является* $\hat{A}$*-инвариантным подпространством.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается по определениям суммы подпространств и инвариантного подпространства:

$$\left.\begin{array}{r} W \leq U,\ V \leq U,\ \hat{A}\,(W) \leq W,\ \hat{A}\,(V) \leq V \\ x \in\ W + V\ \Rightarrow\ x = w + v \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{array}{l} \hat{A}(w) = w' \in W,\ \hat{A}(v) = v' \in V, \\ \hat{A}(x) = \hat{A}(w+v) = \hat{A}(w) + \hat{A}(v) = w' + v' \in W + V. \end{array}$$

Итак, если $x \in\ W + V$, то $\hat{A}(x) \in W + V$, т. е. $W + V$ —$\hat{A}$-инвариантное подпространство. Также просто, по определению пересечения, доказывается второе утверждение. Теорема доказана.

Замечание. Ядро и образ линейного оператора являются инвариантными подпространствами.

Пример 2.2.1 (инвариантные подпространства).

1. Рассмотрим в ЛП V^3 ЛО $\hat{P}_{\vec{a}}$ проекции на направление вектора $\vec{a}$. Понятно, что если проекция вектора $\vec{x}$ равна $\vec{0}$, то $\vec{x} \perp \vec{a}$. А множество всех образов $\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x})$ образует «прямую», параллельную вектору $\vec{a}$. Таким образом, имеем

$$\mathrm{Ker}\,\hat{P}_{\vec{a}} = \left\{\vec{x} \mid \hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{0}\right\} = \left\{\vec{x} \mid \vec{x} \perp \vec{a}\right\},$$

$$\mathrm{Im}\hat{P}_{\vec{a}} = \hat{P}_{\vec{a}}(V^3) = \left\{\vec{y} \mid \vec{y} = \hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}),\ \vec{x} \in V^3\right\} = \left\{\vec{y} \mid \vec{y} \parallel \vec{a}\right\}.$$

Поскольку ядро ЛО $\hat{P}_{\vec{a}}$ ненулевое, оператор является вырожденным. В частности, он необратим, т. е. не существует $\hat{P}_{\vec{a}}^{-1}$. Заметим также, что, кроме ядра и образа, нет других $\hat{P}_{\vec{a}}$-инвариантных подпространств (рис. 2.4, а).

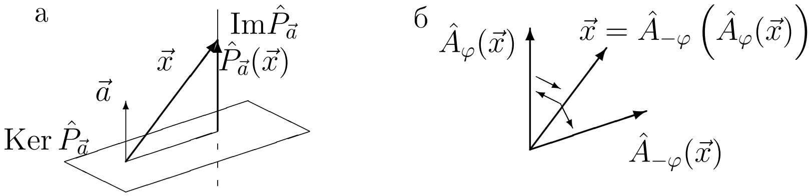

Рис. 2.4. Инвариантные подпространства и обращение операторов: а – ядро и образ ортогональной проекции вектора $\vec{x}$ на направление вектора $\vec{a}$; б – взаимно обратные повороты вектора $\vec{x}$ на углы φ и $-\varphi$

2. Рассмотрим в ЛП V^3 ЛО $\hat{A}_{\varphi}$ поворота на угол φ. Поскольку поворот ненулевого вектора дает ненулевой вектор, имеем

$$\mathrm{Ker}\,\hat{A}_{\varphi} = \left\{\vec{x} \mid \hat{A}_{\varphi}(\vec{x}) = \vec{0}\right\} = \left\{\vec{0}\right\}, \quad \mathrm{Im}\hat{A}_{\varphi} = \hat{A}_{\varphi}(V^3) = V^3.$$

В частности, ЛО $\hat{A}_{\varphi}$ является невырожденным и обладает обратным ЛО $\hat{A}_{\varphi}^{-1}$. Легко понять, что обратное преобразование к преобразованию поворота на угол φ есть поворот на угол $-\varphi$: $\hat{A}_{\varphi}^{-1} = \hat{A}_{-\varphi}$. Далее заметим, что если $\varphi \neq \pi$, то нетривиальных, т. е. отличных от нулевого и самого V^3, $\hat{A}_{\varphi}$-инвариантных подпространств нет (рис. 2.4, б).

3. Рассмотрим в ЛП многочленов $P_3(x)$ ЛО дифференцирования $\hat{D}(f(x)) = f'(x)$. Поскольку производная понижает степень многочлена на единицу, имеем

$$\mathrm{Ker}\,\hat{D} = \left\{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \;\middle|\; \hat{D}(f(x)) = f'(x) = \Theta \equiv 0\right\} =$$

$$= \left\{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \;\middle|\; f(x) \equiv d,\ d \in \mathbb{R}\right\} = P_0(x),$$

$$\mathrm{Im}\hat{D} = \hat{D}(P_3(x)) =$$

$$= \left\{g(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \middle| \exists f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d : D(f) = f' = g\right\} =$$

$$= \left\{g(x) = b_1x^2 + c_1x + d_1 \;\middle|\; b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}\right\} = P_2(x).$$

Поскольку ядро ненулевое, ЛО $\hat{D}(f(x)) = f'(x)$ является вырожденным и не обладает обратным. В данном случае, кроме ядра и образа, D-инвариантным подпространством является также множество многочленов степени не выше, чем 1. Цепочка инвариантных подпространств:

$$U = P_3(x) > P_2(x) > P_1(x) > P_0(x) > \{\Theta\}.$$

2.3. Собственные векторы

В этом разделе рассматривается специальный случай инвариантных подпространств — одномерные подпространства, т. е. будем интересоваться «прямыми», которые остаются неподвижными при действии данного ЛО.

2.3.1. *Определение и свойства собственных векторов*

Определение 2.3.1. *Пусть U — ЛП над полем K, $\hat{A}$ — ЛО на U. Вектор $x \in U$ называется* **собственным вектором** *линейного оператора $\hat{A}$, отвечающим* **собственному значению** *λ, если выполнены два условия:*

$$1)\ x \in U,\ x \neq \Theta;\quad 2)\ \hat{A}(x) = \lambda x,\ \lambda \in K. \tag{2.13}$$

Определение 2.3.2. *Множество всех собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ называется его* **спектром**. *Обозначение:* $\operatorname{spec}\hat{A}$.

Теорема 2.3.1 (о подпространствах собственных векторов).
Если $\hat{A}$ — ЛО на ЛП U над полем K, то верны следующие утверждения:

1) ненулевой вектор $x \in U$ является собственным вектором для ЛО $\hat{A}$ тогда и только тогда, когда $\langle x \rangle$ — $\hat{A}$-инвариантное подпространство;

2) множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, вместе с нулевым вектором – $\hat{A}$-инвариантное подпространство U_λ.

Доказательство. Оба утверждения очевидно следуют из определений собственного вектора и $\hat{A}$-инвариантного подпространства.

Докажем пункт 2 теоремы. По критерию подпространства (теорема 1.4.1), достаточно проверить, что линейная комбинация векторов, отвечающих собственному значению λ, есть снова собственный вектор, отвечающий тому же собственному значению λ :

$$x, y \in U_\lambda \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}(x) = \lambda x, \\ \hat{A}(y) = \lambda y \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \hat{A}(x) + \beta \hat{A}(y) = \\ = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y) \end{array}; \begin{array}{l} \alpha x + \beta y \in U_\lambda \\ \forall \alpha, \beta \in K. \end{array}$$

Таким образом, множество U_λ образует подпространство. Это подпространство $\hat{A}$-инвариантное, действительно:

$$U_\lambda \leq U,\ x \in U_\lambda \ \Leftrightarrow\ \hat{A}(x) = \lambda x \in U_\lambda.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.3.2 (о линейной независимости собственных векторов).
Система собственных векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ линейного оператора $\hat{A}$,

отвечающих попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j$, *является линейно независимой.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы индукцией по количеству векторов k. Действительно, для $k = 1$ система состоит из одного вектора x_1 ненулевого, так как он собственный. Такая система из одного вектора линейно независима.

Предположим, что для системы из $(k-1)$ вектора утверждение доказано. Рассмотрим линейную комбинацию векторов системы $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = \Theta.$$

Подействуем на это равенство оператором $\hat{A}$, учитывая, что $\hat{A}(\Theta) = \Theta$:

$$\hat{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k) = \hat{A}(\Theta) \ \Leftrightarrow\ \alpha_1 \hat{A}(x_1) + \alpha_2 \hat{A}(x_2) + \ldots + \alpha_k \hat{A}(x_k) = \Theta \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k = \Theta.$$

Умножим первое равенство на λ_1 и вычтем из последнего:

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k - (\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_1 x_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_1 x_k) = \Theta \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_1)}_{=0} x_1 + \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} x_2 + \ldots + \alpha_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_1)}_{\neq 0} x_k = \Theta.$$

По предположению индукции система векторов $\{x_2, \ldots, x_k\}$ линейно независима, поэтому в последней линейной комбинации все коэффициенты равны нулю:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} = 0 \\ \ldots \\ \alpha_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_1)}_{\neq 0} = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow\ \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = \Theta \\ \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow\ \alpha_1 x_1 = \Theta,\ \text{но } x_1 \neq \Theta,\ \text{тогда } \alpha_1 = 0.$$

Таким образом, если линейная комбинация векторов $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ равна нулевому вектору, то она тривиальная. Что и требовалось доказать.

Пример 2.3.1 (собственные векторы).

1. Рассмотрим в ЛП V^3 ЛО $\hat{P}_{\vec{a}}$ проекции на направление вектора $\vec{a}$. В примере 2.2.1 были найдены два одномерных $\hat{P}_{\vec{a}}$-инвариантных подпространства:

прямая, параллельная вектору $\vec{a}$ и прямая, перпендикулярная $\vec{a}$. На языке собственных векторов, эти прямые образуют подпространства собственных векторов U_λ. Действительно:

$$\hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x} \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \parallel \hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \hat{P}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{o} = 0 \cdot \vec{x} \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \perp \vec{a} \;\Leftrightarrow\; \vec{x} \in U_{\lambda=0}; \\ \hat{P}_{\vec{a}}(\vec{y}) = \vec{y} = 1 \cdot \vec{y} \;\Leftrightarrow\; \vec{y} \parallel \vec{a} \;\Leftrightarrow\; \vec{y} \in U_{\lambda=1}. \end{array}\right.$$

Понятно, что только такие собственные векторы и собственные значения для проекции на ось существуют и $\operatorname{spec} \hat{P}_{\vec{a}} = \{0, 1\}$.

2. Рассмотрим в ЛП V^3 ЛО $\hat{A}_\varphi$ поворота на угол φ. Если $\varphi \neq \pi$, то нет нетривиальных $\hat{A}_\varphi$-инвариантных подпространств (пример 2.2.1), т. е. нет и одномерных инвариантных. На языке собственных векторов, преобразование поворота не имеет собственных векторов и собственных значений. В частности, это понятно и из геометрических соображений: никакой вектор при повороте не переходит в себе коллинеарный ($\varphi \neq \pi$).

3. Рассмотрим в ЛП многочленов $P_3(x)$ ЛО дифференцирования $\hat{D}(f(x)) = f'(x)$. Среди инвариантных подпространств — единственное одномерное подпространство $P_0(x)$ многочленов нулевой степени. На языке собственных векторов: $\hat{D}$ имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$ и $U_{\lambda=0} = P_0(x)$. Действительно,

$$\hat{D}(f(x)) = \lambda \cdot f(x) \;\Leftrightarrow\; f'(x) = 0 \cdot f(x) \;\Leftrightarrow\; U_{\lambda=0} = P_0(x).$$

2.3.2. *Вычисление координат собственного вектора*

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис линейного пространства U и $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б}$. Нам надо решить уравнение $\hat{A}(x) = \lambda x$ относительно элемента λ поля K и вектора x линейного пространства U. Перейдем к *координатной* форме записи этого равенства и воспользуемся теоремой 2.1.1 о координатах образа вектора: $\left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}}$, а также свойством координат $[\lambda x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}}$. В итоге получим

$$\hat{A}(x) = \lambda x \;\Leftrightarrow\; \left[\hat{A}(x)\right]_{\mathbf{Б}} = [\lambda x]_{\mathbf{Б}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; A_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} = \lambda [x]_{\mathbf{Б}} \;\Leftrightarrow\; A_{\mathbf{Б}}\,[x]_{\mathbf{Б}} - \lambda [x]_{\mathbf{Б}} = [\Theta]_{\mathbf{Б}}.$$

Последнее равенство перепишем в «стандартной» матричной форме:

$$\left(A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)[x]_{\mathbf{Б}} = [\Theta]_{\mathbf{Б}}. \tag{2.14}$$

Получена матричная запись однородной системы линейных уравнений с матрицей системы $\left(A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)$. По определению собственного вектора, $[x]_{\mathbf{Б}}$ — ненулевой столбец, то есть система уравнений (2.14) имеет ненулевое решение. Это означает, что определитель ОСЛУ равен нулю:

$$\left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right| = 0. \tag{2.15}$$

Равенство (2.15) представляет собой уравнение для нахождения собственных значений оператора $\hat{A}$. При этом выражение в левой части этого равенства является многочленом от λ.

Определение 2.3.3. *Выражение* $\left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right|$ *называется* **характеристическим полиномом** *или* **характеристическим многочленом** *оператора* $\hat{A}$ *в базисе* **Б**.

Покажем далее, что коэффициенты характеристического полинома не зависят от того, в каком базисе вычисляется матрица ЛО.

Теорема 2.3.3 (о независимости характ. полинома от базиса). *Пусть* $\hat{A}$ *— линейный оператор ЛП* U. *Тогда коэффициенты характеристического многочлена ЛО* $\hat{A}$ *не зависят от базиса, т. е.*

$$\left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right| = \left|A_{\mathbf{Б}'} - \lambda E\right|$$

для любых базисов **Б** *и* **Б**$'$ *линейного пространства* U.

Доказательство. Пусть T — матрица перехода из базиса **Б** в некоторый базис **Б**$'$ линейного пространства U. Тогда, согласно теореме 2.1.2 о матрице оператора в разных базисах и по формуле (2.10), имеем

$$\left|A_{\mathbf{Б}'} - \lambda E\right| = \left|T^{-1}A_{\mathbf{Б}}T - \lambda E\right| = \left|T^{-1}A_{\mathbf{Б}}T - T^{-1}\left(\lambda E\right)T\right|.$$

Далее используем свойства операции произведения матриц (общий множитель можно выносить за скобки), а также свойства определителей (определитель произведения матриц равен произведению определителей, определители взаимно обратных матриц — взаимно обратные числа):

$$\left|T^{-1}\left(A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)T\right| = \left|T^{-1}\right| \cdot \left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right| \cdot |T| = \left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right| \cdot \left|T^{-1}\right| \cdot |T| =$$
$$= \left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right| \cdot \left|T^{-1}T\right| = \left|\mathrm{A}_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right| \cdot |E| = \left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right|.$$

Итак,

$$\left|A_{\mathbf{Б}'} - \lambda E\right| = \left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right|.$$

Значит, при переходе в другой базис характеристический полином не изменяется. Теорема доказана.

План вычисления координат собственного вектора:

$$\begin{array}{l} 1)\ \text{решить уравнение } \left|A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right| = 0; \\ 2)\ \text{решить ОСЛУ } \left(A_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right)[x]_{\mathbf{Б}} = [\Theta]_{\mathbf{Б}}. \end{array} \tag{2.16}$$

Таким образом, для нахождения собственных векторов и собственных значений линейного оператора $\hat{A}$ необходимо:

1) из уравнения (2.15) найти все собственные значения оператора $\hat{A}$, то есть найти спектр линейного оператора $\hat{A}$;

2) для каждого из найденных собственных значений λ решить ОСЛУ (2.14) и найти собственные векторы, как ФСР ОСЛУ (2.14);

3) каждое подпространство U_λ собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, в координатах описывается как решение ОСЛУ, т. е. как линейная комбинация элементов ФСР.

Пример 2.3.2 (вычисление координат собственных векторов). Рассмотрим в ЛП многочленов $P_3(x)$ ЛО дифференцирования $\hat{D}(f(x)) = f'(x)$. Заметим, что в примере 2.3.1 собственное подпространство $U_{\lambda=0} = P_0(x)$ было найдено из определения собственного вектора. Чтобы сделать это в координатах, фиксируем какой-нибудь базис ЛП $P_3(x)$. Проще всего зафиксировать канонический (естественный) базис:

$$\mathbf{Б} = \{e_1 = x^3,\ e_2 = x^2,\ e_3 = x,\ e_4 = x^0 \equiv 1\}.$$

В этом базисе вычислим матрицу оператора $\hat{D}$ по определению 2.1.3 матрицы ЛО:

$$D_{\mathbf{Б}} = ([\hat{D}(e_1)]_{\mathbf{Б}}[\hat{D}(e_2)]_{\mathbf{Б}}[\hat{D}(e_3)]_{\mathbf{Б}}[\hat{D}(e_4)]_{\mathbf{Б}}),$$

$$\hat{D}(e_1) = (x^3)' = 0{\cdot}x^3+3{\cdot}x^2+0{\cdot}x+0{\cdot}1 = 0{\cdot}e_1+3{\cdot}e_2+0{\cdot}e_3+0{\cdot}e_4 \ \Leftrightarrow\ [\hat{D}(e_1)]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляем координаты образов всех базисных векторов:

$$\hat{D}(e_2) = (x^2)' = 2x \ \Leftrightarrow\ [\hat{D}(e_2)]_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}(e_3)=(x)'=1 \;\Leftrightarrow\; [\hat{D}(e_3)]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\hat{D}(e_4)=(1)'=0 \;\Leftrightarrow\; [\hat{D}(e_4)]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow\; D_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Теперь применим план (2.16) со с. 62 для вычисления собственных значений и координат собственных векторов ЛО $\hat{D}$. Вычислим характеристический полином ЛО D:

$$\left|D_{\mathbf{Б}}-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}0-\lambda&0&0&0\\3&0-\lambda&0&0\\0&2&0-\lambda&0\\0&0&1&0-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)^4.$$

Характеристический полином λ^4 имеет единственный корень $\lambda=0$. Значит, кроме $\lambda=0$, других собственных значений ЛО $\hat{D}$ не имеет. Теперь вычислим координаты в базисе **Б** собственных векторов f, отвечающих собственному значению $\lambda=0$. Для этого нужно решить ОСЛУ:

$$\left(D_{\mathbf{Б}}-\lambda E\right)[f]_{\mathbf{Б}}=[\Theta]_{\mathbf{Б}} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы ОСЛУ равен 3, значит, одна свободная переменная и пусть это будет $f_4=c$. Тогда решение ОСЛУ:

$$[f]_{\mathbf{Б}}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\c\end{pmatrix}=c\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \text{ФСР}:\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=[F]_{\mathbf{Б}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; F(x)=0\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+1\cdot e_4\equiv 1.$$

В координатах в базисе **Б** задача решена, теперь можно записать результат на языке многочленов:

$$U_{\lambda=0}=\langle F(x)\equiv 1\rangle=\{a\,|\;a\in\mathbb{R}\}=P_0(x).$$

Результат вычислений совпал с выводами, сделанными в примере 2.3.1.

2.3.3. *Оператор простой структуры*

Как известно, вид матрицы ЛО зависит от базиса, в котором она вычисляется. Следующей нашей целью будет определение базиса, в котором матрица ЛО имеет наиболее простой вид, а именно — диагональный. Будем говорить, что матрица ЛО **диагонализируема**, если найдется базис, в котором матрица данного ЛО имеет диагональный вид. Такой базис существует не всегда. Далее изучим класс операторов, которые обладают таким свойством.

Определение 2.3.4. *Линейный оператор $\hat{A}$ ЛП U называется* **оператором простой структуры** *тогда и только тогда, когда в U найдется базис, состоящий из собственных векторов оператора $\hat{A}$.*

Теорема 2.3.4 (критерий оператора простой структуры).
Линейный оператор $\hat{A}$ ЛП U является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда найдется базис, в котором матрица этого оператора диагональна (т. е. матрица этого ЛО, вычисленная в любом базисе, является диагонализируемой).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\hat{A}$ является оператором простой структуры. Тогда существует базис $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора $\hat{A}$. Обозначим через λ_i собственное значение вектора e_i, тогда $\hat{A}(e_i) = \lambda_i e_i$ для любого i. Откуда, по определению 2.1.3 матрицы линейного оператора, имеем $\hat{A}(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \ldots + a_{ni}e_n = \lambda_i e_i = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + \lambda_i e_i + \ldots + 0e_n$.

Следовательно, i-й столбец матрицы $A_{\mathbf{Б}} = (a_{ji})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Достаточность. Проводим эти же рассуждения «в обратном порядке». Пусть матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ диагональна: $A_{\mathbf{Б}} = (a_{ji})$, $a_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ \lambda_i & \text{при } i = j \end{cases}$ Тогда, по определению матрицы оператора,

$$\hat{A}(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \ldots + a_{ni}e_n = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + \lambda_i e_i + \ldots + 0e_n = \lambda_i e_i.$$

Таким образом, каждый базисный вектор e_i является собственным, что и требовалось доказать.

Замечание. 1. Как видно из доказательства теоремы, на главной диагонали матрицы ЛО, вычисленной в базисе из собственных векторов, стоят собственные значения ЛО.

2. Диагонализируемость матрицы линейного оператора зависит от количества корней характеристического полинома. Однако в случае существования кратных корней матрица может не быть диагонализируемой.

Рассмотрим $\hat{A}$ — ЛО пространства U над полем $\mathbb{R}$ и признаки диагонализируемости его матрицы.

Некоторые признаки действительного оператора простой структуры

1. Все корни характеристического многочлена действительны и различны, тогда $\hat{A}$ — ЛО простой структуры, т. е. его матрица диагонализируема.

2. Все корни характеристического многочлена действительны, причем если λ — корень кратности s, то ему отвечают ровно s линейно независимых собственных векторов ($\dim U_\lambda = s$). Тогда $\hat{A}$ — ЛО простой структуры и его матрица диагонализируема.

3. Среди корней характеристического многочлена есть корень λ кратности $s > 1$, но ему отвечают *меньше*, чем s линейно независимых собственных векторов ($\dim U_\lambda < s$). Тогда $\hat{A}$ не является ЛО простой структуры и его матрица не диагонализируема.

4. Среди корней действительного характеристического многочлена есть комплексный корень λ. Тогда $\hat{A}$ не является ЛО простой структуры и его матрица не диагонализируема.

5. Характеристический многочлен имеет вид $(\lambda - \alpha)^n$, т. е. имеет единственный действительный корень α. Тогда, $\hat{A}$ является ЛО простой структуры, только тогда, когда $\hat{A}$ есть растяжение в α раз и его матрица диагональна в любом базисе.

По сути дела, приведенные признаки есть простое следствие определения оператора простой структуры.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определения линейного оператора и матрицы линейного оператора в фиксированном базисе. Приведите формулу, связывающую матрицы ЛО в разных базисах.

2. Сформулируйте определения суммы, произведения линейных операторов и умножения оператора на число. Сформулируйте теорему о связи алгебры операторов и алгебры матриц.

3. Сформулируйте определения ядра и образа линейного оператора. Являются ли ядро и образ ЛО инвариантными подпространствами?

4. Сформулируйте определение и свойства инвариантных подпространств.

5. Сформулируйте определение собственного вектора. Приведите свойства собственных векторов. Какие подпространства из собственных векторов являются инвариантными?

6. Вычисление координат собственного вектора.

7. Сформулируйте определение оператора простой структуры. Сформулируйте признак оператора простой структуры.

8. Сформулируйте некоторые признаки диагонализации действительной матрицы.

9. Приведите формулы, вычисляющие образы геометрических векторов при действии на них операторов проекции на ось и на плоскость, симметрии относительно оси и плоскости.

Глава 3

Пространства со скалярным произведением

3.1. Основные понятия

3.1.1. *Определения и примеры*

Определение 3.1.1. *ЛП U над $\mathbb{R}$ называется* **евклидовым пространством** *тогда и только тогда, когда в нем определена функция $(x, y) : U \to \mathbb{R}$, называемая* **скалярным произведением** *векторов, удовлетворяющая свойствам (аксиомам) $\forall x, y, z \in U,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*

1) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность);

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$ (линейность по первому аргументу);

3) $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ (положительная определенность).

В геометрическом ЛП V^3 скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos\varphi$ позволяет по алгебраическим формулам вычислять геометрические характеристики, а именно длины векторов и углы между ними:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})},\ \cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})}}.$$

Но эти формулы можно обобщить на произвольные евклидовы пространства. Действительно, в силу аксиомы положительной определенности для всякого вектора $x \in U$, $x \neq \Theta$, $(x, x) > 0$. Тогда *длиной вектора* назовем $\sqrt{(x, x)} = |x|$. А косинус «угла» между векторами следует определить формулой $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)(y, y)}}$. Заметим, что ограниченность $|\cos\varphi| < 1$ также имеет место в силу неравенства Коши – Буняковского (см. далее теорему 3.1.1).

Итак, по сути дела, аксиомы скалярного произведения позволяют использовать его как инструмент для вычисления «длин» и «углов» как характеристик векторов любого евклидова ЛП. Более того, продолжим обобщать понятие скалярного произведения на ЛП с комплексной арифметикой, т. е. над полем $\mathbb{C}$.

Поставим целью сохранить понятие «длины» как $\sqrt{(x,x)} = |x|$. Тогда необходимо, чтобы (x,x) при $x \neq \Theta$ было бы действительным положительным числом. Допустим, что для некоторого $x \in U$, $(x,x) = k > 0$. Рассмотрим скалярный квадрат вектора $(1+i)x$:

$$((1+i)x,(1+i)x) = (1+i)^2(x,x) = 2i(x,x) = 2ki \notin \mathbb{R}(!?).$$

Таким образом, нельзя просто сохранить аксиомы евклидова пространства. Но, оказывается, для сохранения третьей аксиомы достаточно положить $(x,y) = \overline{(y,x)}$ — комплексно сопряженное число.

Определение 3.1.2. Унитарным *или* **эрмитовым** *пространством называется ЛП U над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, на котором определена функция $(x,y) : U \mapsto \mathbb{C}$, называемая* **скалярным произведением** *векторов, удовлетворяющая свойствам (аксиомам) $\forall x,y,z \in U$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{C}$:*

1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (антикоммутативность);

2) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$ (линейность по первому аргументу);

3) $(x,x) \geq 0$ и $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$ (положительная определенность).

Пример 3.1.1 (евклидовы и унитарные пространства).

1. Евклидово ЛП V^3 геометрических векторов с обычным определением скалярного произведения:

$$(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos\varphi, \text{ где } \varphi \text{ — угол между векторами } \vec{x} \text{ и } \vec{y}.$$

2. Евклидово арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением:

$$\text{если } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ то } (X,Y) = X^tY = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

3. Евклидово пространство $C_{[a,b]}$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, со скалярным произведением:

$$(f,g) = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,dx, \text{ где } \rho(x) > 0 \text{ — } \textit{весовая} \text{ функция.}$$

4. Унитарное арифметическое пространство $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением:

$$\text{если } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \text{то } (X,Y) = X^t\overline{Y} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}.$$

В формуле используется комплексное сопряжение, т. е.

$$y = a + bi \ \Leftrightarrow \ \overline{y} = \overline{a + bi} = a - bi, \text{ где } a, b \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1.$$

Теперь заметим, что аксиома линейности по первому аргументу для унитарного пространства не обобщается на второй аргумент. Выведем и запишем формулы скалярного произведения двух линейных комбинаций.

Евклидово пространство. Из первых двух аксиом скалярного произведения следует линейность по второму аргументу:

$$(x, \lambda y + \mu z) = (\lambda y + \mu z, x) = \lambda(y,x) + \mu(z,x) = \lambda(x,y) + \mu(x,z).$$

В общем виде скалярное произведение двух линейных комбинаций:

$$\forall x_i, y_j \in U, \ \forall \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R} \quad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \mu_j (x_i, y_j). \tag{3.1}$$

Унитарное пространство. Из первых двух аксиом скалярного произведения следует «антилинейность» по второму аргументу:

$$(x, \lambda y + \mu z) = \overline{(\lambda y + \mu z, x)} = \overline{\lambda(y,x) + \mu(z,x)} = \overline{\lambda(y,x)} + \overline{\mu(z,x)} =$$
$$= \overline{\lambda} \cdot \overline{(y,x)} + \overline{\mu} \cdot \overline{(z,x)} = \overline{\lambda}(x,y) + \overline{\mu}(x,z).$$

В общем виде скалярное произведение двух линейных комбинаций:

$$\forall x_i, y_j \in U, \ \forall \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C} \quad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \overline{\mu_j} (x_i, y_j). \tag{3.2}$$

3.1.2. *Неравенство Коши – Буняковского*

Теорема 3.1.1 (о неравенстве Коши – Буняковского). *В евклидовом пространстве для любых векторов x, y выполняется неравенство (неравенство Коши – Буняковского): $|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)(y,y)} = |x||y|$.*

Доказательство. Пусть λ — произвольное действительное число.

Рассмотрим скалярный квадрат вектора $x - \lambda y$:

$$0 \le (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y).$$

Таким образом, полученный квадратный трехчлен для любого значения переменной λ не отрицателен. Но тогда его дискриминант не положителен:

$$D = 4\left((x, y)^2 - (x, x)(y, y)\right) \le 0.$$

Поэтому

$$|(x, y)| \le \sqrt{(x, x)(y, y)},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. 1. Неравенство Коши – Буняковского верно и для унитарных ЛП. Но приведенное доказательство нуждается в дополнении для этого случая.

2. В силу неравенства Коши – Буняковского определение косинуса угла между векторами как

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)(y, y)}} = \frac{(x, y)}{|x||y|}$$

становится корректным, так как $|\cos\varphi| \le 1$. Но это понятие не может быть перенесено на комплексное (унитарное) пространство.

3. Следствием неравенства Коши – Буняковского для евклидова ЛП (над полем $\mathbb{R}$) является **неравенство треугольника:** $|x + y| \le |x| + |y|$. Действительно,

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = \underbrace{(x, x)}_{=|x|^2} + \underbrace{2\,(x, y)}_{\le 2|x||y|} + \underbrace{(y, y)}_{=|y|^2} \le (|x| + |y|)^2 .$$

Извлекая корень, получим

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

Переписывая неравенство Коши – Буняковского и неравенство треугольника для скалярного произведения $(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ в функциональном пространстве $C_{[a,b]}$, получим хорошо известные из курса математического анализа интегральные неравенства:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b (g(x))^2\,dx}$$

$$\sqrt{\int\limits_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx} \leq \sqrt{\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx} + \sqrt{\int\limits_a^b (g(x))^2\,dx}.$$

3.1.3. *Ортогональные системы векторов*

Определение 3.1.3. *Векторы x, y из ЛП со скалярным произведением называются* **ортогональными** *тогда и только тогда, когда $(x, y) = 0$. Соответственно система векторов $\{x_1, \ldots, x_k\}$ называется* **ортогональной системой**, *если при $i \neq j$ имеем $(x_i, x_j) = 0$.*

Как видно, определение ортогональности не зависит от того, над каким полем рассматривается ЛП — над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$. Поэтому сформулированные далее теоремы верны как для унитарного, так и для евклидова пространства.

Теорема 3.1.2 (о линейной независимости ортогональных систем). *Пусть U — унитарное (евклидово) пространство и система ненулевых векторов $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ортогональна. Тогда $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — линейно независимая система.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{x_1, \ldots, x_k\}$, равную нулевому вектору:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = \Theta.$$

Умножим это равенство скалярно на вектор x_1, учитывая, что $(x_i, x_1) = 0$ при $i \neq 1$, получим

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, x_1) = (\Theta, x_1) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \alpha_1(x_1, x_1) + \alpha_2(x_2, x_1) + \ldots + \alpha_k(x_k, x_1) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \alpha_1 \underbrace{(x_1, x_1)}_{\neq 0} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 0.$$

Умножим первое равенство на x_2 и, рассуждая так же, получим, что коэффициент $\alpha_2 = 0$ и т. д. Другими словами, все коэффициенты линейной комбинации нулевые. Значит, система $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — линейно независимая.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.3 (об ортогональном дополнении вектора). *Пусть U — унитарное (евклидово) пространство. Тогда множество векторов, ортогональных фиксированному вектору, является подпространством:*

$$V_y = \{x \mid (x, y) = 0\} \leq U.$$

Доказательство. Рассуждаем по критерию подпространства:

$$\begin{cases} x \in V_y \;\Leftrightarrow\; (x,y)=0, \\ z \in V_y \;\Leftrightarrow\; (z,y)=0, \end{cases} \Rightarrow\; (\alpha x+\beta z, y) = \alpha(x,y)+\beta(z,y) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha x+\beta z \in V_y.$$

Утверждение доказано.

Определение 3.1.4. *Пусть U — унитарное (евклидово) пространство. Тогда множество векторов, ортогональных каждому вектору из M, называется* **ортогональным дополнением** $M^{\perp}$ *системы векторов M:*

$$M^{\perp} = \{x | \forall y \in M \;(x,y)=0\}.$$

Замечание. Для любой системы векторов M унитарного (евклидова) пространства U — $M^{\perp}$ является подпространством. Доказательство аналогично уже приведенному.

Теорема 3.1.4 (теорема Пифагора). *Пусть U — унитарное (евклидово) ЛП и система ненулевых векторов $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ортогональна. Тогда*

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_k|^2.$$

Доказательство. Проведем рассуждение для суммы из двух векторов:

$$|x_1+x_2|^2 = (x_1+x_2, x_1+x_2) = (x_1,x_1)+\underbrace{(x_1,x_2)}_{=0}+\underbrace{(x_2,x_1)}_{=0}+(x_2,x_2) = |x_1|^2+|x_2|^2.$$

Далее, рассуждая по индукции, получим заключение теоремы для любого числа слагаемых. Теорема доказана.

3.1.4. *Процесс ортогонализации Грама – Шмидта*

Системы ортогональных векторов обладают очень удобными свойствами. Еще более удобно, если ортогональной системой является базис пространства. В этом разделе рассмотрим алгоритм, позволяющий из любой линейно независимой системы получить ортогональную, причем линейные оболочки первоначальной и новой систем будут совпадать.

Пусть $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольная ЛНС евклидова (унитарного) ЛП U.

Индуктивно будем строить ортогональную систему $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Шаг 1. Положим, $e_1 = v_1$.

Шаг 2. Положим, $e_2 = v_2 + \alpha_{2,1} e_1$. Вычислим коэффициент $\alpha_{2,1}$ из условия ортогональности:

$$\begin{cases} e_2 = v_2 + \alpha_{2,1} e_1 \\ (e_2, e_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow (e_2, e_1) = (v_2 + \alpha_{2,1} e_1, e_1) = (v_2, e_1) + \alpha_{2,1}(e_1, e_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{2,1} = -\frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} \Rightarrow e_2 = v_2 - \frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1.$$

При этом выполнены два условия: 1) $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$; 2) $(e_1, e_2) = 0$.

Шаг 3. Положим, $e_3 = v_3 + \alpha_{3,1} e_1 + \alpha_{3,2} e_2$. Вычислим коэффициенты $\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}$ из условия ортогональности:

$$\begin{cases} e_3 = v_3 + \alpha_{3,1} e_1 + \alpha_{3,2} e_2 \\ (e_3, e_1) = 0 \\ (e_3, e_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (e_3, e_1) = (v_3 + \alpha_{3,1} e_1 + \alpha_{3,2} e_2, e_1) = (v_3, e_1) + \alpha_{3,1}(e_1, e_1) + \alpha_{3,2} \underbrace{(e_2, e_1)}_{=0} = 0 \\ (e_3, e_2) = (v_3 + \alpha_{3,1} e_1 + \alpha_{3,2} e_2, e_2) = (v_3, e_2) + \alpha_{3,1} \underbrace{(e_1, e_2)}_{=0} + \alpha_{3,2}(e_2, e_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v_3, e_1) + \alpha_{3,1}(e_1, e_1) = 0 \\ (v_3, e_2) + \alpha_{3,2}(e_2, e_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{3,1} = -\dfrac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)} \\ \alpha_{3,2} = -\dfrac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_3 = v_3 - \frac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2.$$

При этом выполнены два условия:

$$1) \ \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle; \quad 2) \ (e_1, e_2) = 0, \ (e_1, e_3) = 0, \ (e_3, e_2) = 0.$$

Шаг индукции. Пусть уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, причем для любого i с условием $1 \le i \le m$ и для любых j, k с условиями $1 \le j < k \le m$ справедливы утверждения (предположение индукции): 1) $e_i \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_i \rangle$; 2) $(e_j, e_k) = 0$. Положим:

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m. \tag{3.3}$$

Вычислим коэффициенты $\alpha_{m+1,1}, \ldots, \alpha_{m+1,m}$ из условия ортогональности:

$$0 = (e_{m+1}, e_k) = (v_{m+1} + \alpha_{m+1,1} e_1 + \alpha_{m+1,2} e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m} e_m, e_k) =$$

$$= (v_{m+1}, e_k) + \alpha_{m+1,1}(e_1, e_k) + \alpha_{m+1,2}(e_2, e_k) + \ldots + \alpha_{m+1,m}(e_m, e_k) =$$

$$= (v_{m+1}, e_k) + \alpha_{m+1,k}(e_k, e_k).$$

$$0 = (v_{m+1}, e_k) + \alpha_{m+1,k}(e_k, e_k).$$

Следовательно, получаем формулу для вычисления коэффициентов в формуле (3.3):

$$\alpha_{m+1,k} = -\frac{(v_{m+1}, e_k)}{(e_k, e_k)}. \tag{3.4}$$

Нетрудно показать, что при таком выборе этих коэффициентов заключение индукции $(e_j, e_{m+1}) = 0,\ 1 \le j \le m$ выполняется. Значит, на шаге с номером $m = n$ получим искомый ортогональный базис.

Соберем полученные формулы, позволяющие ортогонализировать любую линейно независимую систему векторов.

Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Пусть $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — произвольная ЛНС евклидова (унитарного) ЛП U.

Индуктивно строим ортогональную систему $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Шаг 1. Положим, $e_1 = v_1$.

Шаг 2. Положим, $e_2 = v_2 - \dfrac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1$.

Шаг 3. Положим, $e_3 = v_3 - \dfrac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 - \dfrac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)}e_2$.

Шаг индукции. Положим:

$$e_{m+1} = v_{m+1} + \alpha_{m+1,1}e_1 + \alpha_{m+1,2}e_2 + \ldots + \alpha_{m+1,m}e_m, \tag{3.5}$$

$$\text{где } \alpha_{m+1,k} = -\frac{(v_{m+1}, e_k)}{(e_k, e_k)}. \tag{3.6}$$

В ЛП со скалярным произведением наиболее простое координатное описание объектов получается в ортогональных базисах.

Определение 3.1.5. *Базис* $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *евклидова (унитарного) пространства* U *называется* **ортонормированным базисом** *(ОНБ) тогда и только тогда, когда для любых* $1 \le i, j \le n$ *имеем* $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, *где* $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i \ne j \\ 1, & \text{при } i = j \end{cases}$ *— так называемый* **символ Кронекера**, *или* δ**-символ Кронекера**.

В любом конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве есть ортонормированный базис. Действительно, по формулам (3.5) можно ортогонализировать любой базис пространства. Если же нужно получить ортонормированный базис, то остается **нормировать** полученный ортогональный базис $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$: $\mathbf{B}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$, где $e'_i = \dfrac{1}{\sqrt{(e_i, e_i)}} \cdot e_i$. Таким образом, в конечном счете будет построен ОНБ $\mathbf{B}'$.

3.1.5. *Вычисление скалярного произведения в координатах*

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис унитарного (или евклидова) пространства U. Тогда

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (e_i, e_j) \overline{y_j}. \quad (3.7)$$

Заметим, что величины (e_i, e_j) не зависят от векторов x, y, а представляют собой характеристику базиса.

Определение 3.1.6. *Матрица* $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ & & \ldots & \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$ *называется* **матрицей Грама** *базиса* $\mathbf{Б}$.

Полученное ранее равенство (3.7) можно записать в матричном виде, что мы сделаем, оформив результат в виде теоремы.

Теорема 3.1.5 (о вычислении скалярного произведения).
Если $\mathbf{Б}$ *— базис унитарного (евклидова) пространства* U *и* $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ *— матрица Грама этого базиса, то для любых векторов* $x, y \in U$ *имеет место равенство*

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]}_{\mathbf{Б}}. \quad (3.8)$$

Замечание. Для евклидова пространства частный случай формулы

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} [y]_{\mathbf{Б}}, \quad (3.9)$$

поскольку $\overline{[y]}_{\mathbf{Б}} = [y]_{\mathbf{Б}}$.

Теорема 3.1.6 (свойства матрицы Грама).

1. Матрица Грама любого базиса унитарного (евклидова) пространства невырожденная.

2. Матрица Грама любого базиса унитарного пространства **эрмитова:** $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^t_{\mathbf{Б}}}$, *а евклидова пространства симметричная, то есть* $\Gamma_{\mathbf{Б}} = \Gamma^t_{\mathbf{Б}}$.

Доказательство. 1. От противного. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис унитарного пространства U, матрица Грама которого вырожденная, то есть определитель $\left|\Gamma_{\mathbf{Б}}\right| = 0$. Тогда система однородных уравнений, в матричной форме имеющая вид $\Gamma_{\mathbf{Б}} X = O_{n\times 1}$ имеет ненулевое решение X. Из равенства $\Gamma_{\mathbf{Б}} X = O_{n\times 1}$ получаем $X^t \Gamma_{\mathbf{Б}} X = (0)_{1\times 1}$, 0 — число.

Обозначим через x такой вектор пространства U, для которого $[x]_{\mathbf{Б}} = X$. Тогда, в силу теоремы 3.1.5 о вычислении скалярного произведения, равенство $X^t\Gamma_{\mathbf{Б}}X = (0)$ означает, что $(x,x) = 0$, откуда, по аксиомам скалярного произведения в унитарном пространстве, получаем $x = \Theta \in U$, что противоречит предположению о том, что X — ненулевая матрица-столбец.

2. Очевидно, так как по аксиомам скалярного произведения в унитарном пространстве

$$\gamma_{ij} = (e_i, e_j) = \overline{(e_j, e_i)} = \overline{\gamma_{ji}} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^t_{\mathbf{Б}}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.1.7 (о матрице Грама в разных базисах). *Пусть U — унитарное (евклидово) пространство, $\Gamma_{\mathbf{Б}}$ и $\Gamma_{\mathbf{Б}'}$ — матрицы Грама базисов* **Б** *и* **Б**$'$ *соответственно, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ — матрица перехода из базиса* **Б** *в базис* **Б**$'$. *Тогда*

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}. \tag{3.10}$$

Доказательство. Согласно формуле (3.8) для вычисления скалярного произведения с помощью матрицы Грама, для любых векторов $x, y \in U$ имеем, с одной стороны,

$$(x,y) = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}'};$$

с другой стороны,

$$(x,y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}}.$$

Итак,

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}'} = (x,y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}}.$$

Применяя формулу вычисления координат вектора в новом базисе (1.7), имеем

$$[x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}} = \left(T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,[x]_{\mathbf{Б}'}\right)^t\Gamma_{\mathbf{Б}}\left(\overline{T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'}}\right).$$

Далее по свойствам транспонирования матриц и комплексного сопряжения чисел получим

$$[x]^t_{\mathbf{Б}}\,\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}} = \left(T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,[x]_{\mathbf{Б}'}\right)^t\Gamma_{\mathbf{Б}}\left(\overline{T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,[y]_{\mathbf{Б}'}}\right) =$$

$$= [x]^t_{\mathbf{Б}'}\,T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}'} = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}'}.$$

Итак, равенство

$$[x]^t_{\mathbf{Б}'}\,\Gamma_{\mathbf{Б}'}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}'} = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\,T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\overline{[y]}_{\mathbf{Б}'}$$

справедливо *для любых* матриц $[x]_{\mathbf{Б}'}$ и $[y]_{\mathbf{Б}'}$ соответствующей размерности. Поэтому

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Для евклидова пространства частный случай формулы (3.10):

$$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}. \tag{3.11}$$

3.2. Линейные операторы и скалярное произведение

3.2.1. *Сопряженный оператор*

Определение 3.2.1. *Пусть U — евклидово или унитарное ЛП. Тогда ЛО $\hat{A}^*$ называется* **сопряженным** *для линейного оператора $\hat{A}$, если имеет место равенство*

$$\Big(\hat{A}(x), y\Big) = \Big(x, \hat{A}^*(y)\Big) \tag{3.12}$$

для любых векторов $x, y \in U$.

Вопрос существования такого «парного», т. е. сопряженного, ЛО для всякого оператора решим в следующих теоремах.

Теорема 3.2.1 (о матрице сопряженного оператора). *Если $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе* **Б** *унитарного (евклидова) ЛП U, то матрица $A^*_{\mathbf{Б}}$ сопряженного оператора $\hat{A}^*$ имеет вид*

$$A^*_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}}A^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}}. \tag{3.13}$$

В частности, если U — евклидово пространство, то

$$A^*_{\mathbf{Б}} = \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}}A^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}.$$

Доказательство. Пусть в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $A_{\mathbf{Б}}$ — матрица ЛО $\hat{A}$.

Тогда, согласно формуле (3.8) вычисления скалярного произведения и теореме 2.1.1 о координатах образа вектора, получим

$$\Big(\hat{A}(x), y\Big) = \left(A_{\mathbf{Б}}[x]_{\mathbf{Б}}\right)^t\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{[y]_{\mathbf{Б}}} = [x]^t_{\mathbf{Б}}A^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{[y]_{\mathbf{Б}}}.$$

С другой стороны,

$$\Big(x, \hat{A}^*(y)\Big) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{A^*_{\mathbf{Б}}[y]_{\mathbf{Б}}} = [x]^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{A^*}_{\mathbf{Б}}\overline{[y]_{\mathbf{Б}}}.$$

Таким образом, получили равенство, верное для любых векторов $x,\ y \in U$:

$$[x]^t_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}} = [x]^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{A^*}_{\mathbf{Б}} \overline{[y]_{\mathbf{Б}}}.$$

Тогда получаем

$$A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}} = \Gamma_{\mathbf{Б}} \overline{A^*}_{\mathbf{Б}} \ \Leftrightarrow \ A^*_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}}},$$

т.е. равенство (3.13). Теорема доказана.

Теперь можно сделать вывод о существовании и единственности сопряженного ЛО к каждому ЛО. Действительно, всякая матрица в фиксированном базисе однозначно определяет линейный оператор и, по доказанной теореме, по матрице любого ЛО вычисляется матрица ему сопряженного ЛО.

Следствие. Для любого ЛО $\hat{A}$ унитарного или евклидова ЛП существует, причем единственный, сопряженный ЛО $\hat{A}^*$.

Теорема 3.2.2 (свойства сопряженных операторов). *В унитарном (евклидовом) ЛП имеют место следующие свойства сопряженных ЛО:*

1) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$*;*

2) $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^* = \hat{A}^*+\hat{B}^*$*;*

3) $\left(\lambda\hat{A}\right)^* = \overline{\lambda}\hat{A}^*$*, для евклидовых пространств* $\left(\lambda\hat{A}\right)^* = \lambda\hat{A}^*$*;*

4) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$*;*

5) $\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^*\right)^{-1}$*;*

6) **Теорема Фредгольма:** $\hat{A}(U)^\perp = \operatorname{Ker}\hat{A}^*$.

Доказательство. Докажем свойства 1 и 5.

1. $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$.

По равенству (3.12) из определения сопряженного оператора

$$\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(\hat{A}\left(\hat{B}(x)\right), y\right) = \left(\hat{B}(x), \hat{A}^*(y)\right) =$$

$$= \left(x, \hat{B}^*\left(\hat{A}^*(y)\right)\right) = \left(x, \hat{B}^*\hat{A}^*(y)\right).$$

С другой стороны,

$$\left(\hat{A}\hat{B}(x), y\right) = \left(x, \left(\hat{A}\hat{B}\right)^*(y)\right).$$

Итак, для любых векторов $x, y \in U$ имеем

$$\left(x, \left(\hat{A}\hat{B}\right)^*(y)\right) = \left(x, \hat{B}^*\hat{A}^*(y)\right) \;\Rightarrow\; \left(\hat{A}\hat{B}\right)^*(y) = \hat{B}^*\hat{A}^*(y).$$

По следствию из теоремы 3.2.1 о существовании и единственности сопряженного оператора получено доказываемое равенство.

5. Докажем, что $\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^*\right)^{-1}$, используя свойство 1.

$$\hat{A}^*\left(\hat{A}^{-1}\right)^* = \left(\hat{A}^{-1}\hat{A}\right)^* = \hat{E}^* = \hat{E}.$$

Получили доказываемое равенство.

Доказательства остальных свойств можно посмотреть, например в [11]. Теорема доказана.

Далее выделим и изучим некоторые классы операторов, связанные с понятием сопряженного ЛО.

3.2.2. *Самосопряженные и эрмитовы операторы*

Определение 3.2.2. *Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова (унитарного) пространства U называется* **самосопряженным** *(***эрмитовым***) оператором тогда и только тогда, когда $\hat{A}^* = \hat{A}$.*

Постольку поскольку свойства ЛО отражаются в свойствах их матриц, нам понадобится параллельная (матричная) терминология.

Определение 3.2.3. *Квадратная матрица A называется* **симметрической***, если $A^t = A$. Квадратная комплексная матрица A называется* **эрмитовой***, когда $\overline{A}^t = A$.*

Теорема 3.2.3 (свойства самосопряженных и эрмитовых ЛО).
В евклидовом (унитарном) пространстве верны следующие утверждения:

1) спектр самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$ действительный: $\operatorname{spec}\hat{A} \subset \mathbb{R}$;

2) собственные векторы самосопряженного (эрмитова) оператора $\hat{A}$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны;

3) в ОНБ матрица оператора является симметрической (эрмитовой) тогда и только тога, когда оператор самосопряженный (эрмитов).

Доказательство. 1. Итак, докажем, что все собственные значения эрмитова оператора унитарного пространства являются вещественными числами.

Пусть ρ — собственное значение, а v — собственный вектор ЛО $\hat{A}$, отвечающий собственному значению ρ. Тогда

$$\begin{cases} \hat{A}^* = \hat{A} \\ \hat{A}(v) = \rho v \end{cases} \Rightarrow \quad \rho(v,v) = (\rho v, v) = (\hat{A}(v), v) = (v, \hat{A}^*(v)) = (v, \hat{A}(v)) =$$

$$= (v, \rho v) = \overline{(\rho v, v)} = \overline{\rho(v,v)} = \overline{\rho}\overline{(v,v)} = \overline{\rho}(v,v) \Rightarrow \ \overline{\rho} = \rho.$$

Следовательно, ρ — вещественное число, что и требовалось доказать.

2. Пусть $\hat{A}(u) = \lambda u,\ \hat{A}(v) = \rho v,\ \lambda \neq \rho$. По пункту 2) $\rho = \overline{\rho}$. Тогда

$$\begin{cases} \hat{A}^* = \hat{A} \\ \hat{A}(v) = \rho v \\ \hat{A}(u) = \lambda u \\ \lambda \neq \overline{\rho} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda(u,v) = (\lambda u, v) = (\hat{A}(u), v) = \\ = (u, \hat{A}(v)) = (u, \rho v) = \overline{\rho}(u,v) = \rho(u,v) \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \lambda(u,v) = \rho(u,v) \ \Rightarrow \ \underbrace{(\lambda - \rho)}_{\neq 0}(u,v) = 0 \ \Rightarrow \ (u,v) = 0.$$

3. Утверждение следует из формулы (3.13) матрицы сопряженного оператора, самосопряженности $\hat{A}^* = \hat{A}$ и того факта, что матрица Грама ортонормированного базиса единичная:

$$A_{\mathbf{Б}} = A^*_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}}} = \overline{E A^t_{\mathbf{Б}} E} = \begin{cases} \overline{A^t_{\mathbf{Б}}} - \text{ для унитарного ЛП;} \\ A^t_{\mathbf{Б}} - \text{ для евклидова ЛП.} \end{cases}$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2.4 (о самосопряженном операторе). *Линейный оператор* $\hat{A}$ *евклидова (унитарного) пространства* U *является самосопряженным (эрмитовым) тогда и только тогда, когда в* U *существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора* $\hat{A}$ *и спектр* $\hat{A}$ *состоит из вещественных чисел.*

Примем теорему без доказательства.

Пример 3.2.1 (матрица эрмитова ЛО). Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2\}$ — ОНБ унитарного пространства U. В базисе $\mathbf{Б}' = \{e_1' = e_1 + e_2, e_2' = 2e_2\}$ ЛО $\hat{A}$ задан своей матрицей $A_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$. Является ли $\hat{A}$ эрмитовым? Для решения задачи можно использовать два способа рассуждения.

Первый способ. Воспользуемся признаком унитарного ЛО по его матрице в ОНБ $\mathbf{Б}$: $\overline{A^t_{\mathbf{Б}}} = A_{\mathbf{Б}}$ (теорема 3.2.3). Для этого вычислим $A_{\mathbf{Б}}$:

$$\left.\begin{aligned} A_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}A_{\mathbf{Б}'}T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}} \\ T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ T_{\mathbf{Б}'\to\mathbf{Б}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & A_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\ & = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 3+5i & 3-i \end{pmatrix} \neq \overline{A^t_{\mathbf{Б}}}, \\ & \overline{A^t_{\mathbf{Б}}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 3-5i \\ 1+i & 3+i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Второй способ. Воспользуемся признаком унитарного ЛО по его матрице в произвольном базисе $\mathbf{Б}'$: $A^*_{\mathbf{Б}'} = A_{\mathbf{Б}'}$, где $A^*_{\mathbf{Б}'} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}'}A^t_{\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}'}}$ (теорема 3.2.1):

$$\left.\begin{aligned} & \Gamma_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} (e_1', e_1') & (e_1', e_2') \\ (e_2', e_1') & (e_2', e_2') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \overline{\Gamma_{\mathbf{Б}'}} \\ & \Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}'} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}'}} \\ & \overline{A^t_{\mathbf{Б}'}} = A_{\mathbf{Б}'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^*_{\mathbf{Б}'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & 3-5i \\ 2i & 3i \end{pmatrix} \neq A_{\mathbf{Б}'}.$$

Несмотря на то, что изначально заданная матрица оператора была эрмитова, т. е. $\overline{A^t_{\mathbf{Б}'}} = A_{\mathbf{Б}'}$, сам оператор эрмитовым не является, так как базис $\mathbf{Б}'$ не ортонормированный (только в ОНБ матрица эрмитова оператора эрмитова и наоборот).

3.2.3. *Ортогональные и унитарные операторы*

Определение 3.2.4. *Линейный оператор $\hat{A}$ евклидова (унитарного) ЛП U называется* **ортогональным** *(***унитарным***) оператором тогда и только тогда, когда $\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$.*

Определение 3.2.5. *Квадратная действительная матрица A называется* **ортогональной***, если $A^t = A^{-1}$. Комплексная матрица A называется* **унитарной***, когда $\overline{A^t} = A^{-1}$.*

Теорема 3.2.5 (свойства ортогональных и унитарных операторов). *В евклидовом (унитарном) пространстве верны следующие утверждения:*

1) ортогональный (унитарный) оператор сохраняет скалярное произведение: $(\hat{A}(x), \hat{A}(y)) = (x, y)$, в частности, ортогональный (унитарный) оператор переводит ОНБ в ОНБ;

2) в ОНБ матрица оператора является ортогональной (унитарной) тогда и только тога, когда оператор ортогональный (унитарный);

3) собственные числа ортогонального (унитарного) оператора по модулю равны единице;

4) собственные векторы ортогонального (унитарного) оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны;

5) в любом базисе **Б** *детерминант матрицы* $A_{\mathbf{Б}}$ *ортогонального (унитарного) оператора* $\hat{A}$ *по модулю равен* 1.

Доказательство. 1. По определению сопряженного оператора

$$(\hat{A}(x), \hat{A}(y)) = (x, \hat{A}^*(\hat{A}(y))) = (x, \hat{A}^{-1}(\hat{A}(y))) = (x, y).$$

2. Утверждение следует из формулы (3.13) матрицы сопряженного оператора, ортогональности ЛО $\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$ и того факта, что матрица Грама ортонормированного базиса единичная:

$$A_{\mathbf{Б}}^{-1} = A_{\mathbf{Б}}^* = \overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} A_{\mathbf{Б}}^t \Gamma_{\mathbf{Б}}} = \overline{E A_{\mathbf{Б}}^t E} = \begin{cases} \overline{A_{\mathbf{Б}}^t} - & \text{для унитарного ЛП;} \\ A_{\mathbf{Б}}^t - & \text{для евклидова ЛП,} \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

3. Пусть x — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ. Тогда $\lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot (x, x) = (\lambda x, \lambda x) = (\hat{A}(x), \hat{A}(x)) = (x, \hat{A}^*(\hat{A}(x))) =$

$$= (x, \hat{A}^{-1}(\hat{A}(x))) = (x, x) \;\Rightarrow\; \lambda \cdot \overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1.$$

4. Пусть $\hat{A}(u) = \lambda u,\; \hat{A}(v) = \rho v,\; \lambda \neq \rho$. По пункту 3) $|\rho| = |\lambda| = 1$. Тогда

$$\begin{cases} \hat{A}^* = \hat{A}^{-1} \\ \hat{A}(v) = \rho v \\ \hat{A}(u) = \lambda u \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (u, v) = (u, \hat{A}^{-1}\left(\hat{A}(v)\right)) = (\hat{A}(u), \hat{A}(v)) = \\ = (\lambda u, \rho v) = \lambda\overline{\rho}(u, v) \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (u, v) = \lambda\overline{\rho}(u, v) \;\Leftrightarrow\; (1 - \lambda\overline{\rho})(u, v) = 0.$$

Предположим, что $1 = \lambda\overline{\rho}$. Тогда получим

$$\lambda = \frac{1}{\overline{\rho}} = \frac{\rho}{\overline{\rho}\rho} = \frac{\rho}{|\rho|} = \rho,$$

что противоречит условию: $\lambda \neq \rho$. Следовательно,

$$\underbrace{(1 - \lambda\overline{\rho})}_{\neq 0}(u, v) = 0 \;\Rightarrow\; (u, v) = 0.$$

5. Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей, а транспонирование определителя не меняет, имеем

$$|A_{\mathbf{Б}}^{-1}| = |A_{\mathbf{Б}}^{*}| = |\overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1} A_{\mathbf{Б}}^{t} \Gamma_{\mathbf{Б}}}| = |\overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}} \cdot \overline{A_{\mathbf{Б}}^{t}} \cdot \overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}}| =$$

$$= |\overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}}||\overline{A_{\mathbf{Б}}^{t}}||\overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}}| = \underbrace{\overline{|\Gamma_{\mathbf{Б}}^{-1}||\Gamma_{\mathbf{Б}}|}}_{=1} \cdot |\overline{A_{\mathbf{Б}}^{t}}| = |\overline{A_{\mathbf{Б}}}|.$$

Таким образом, получим

$$|A_{\mathbf{Б}}^{-1}| = (|A_{\mathbf{Б}}|)^{-1} = |\overline{A_{\mathbf{Б}}}| \Rightarrow |A_{\mathbf{Б}}| \cdot \overline{|A_{\mathbf{Б}}|} = 1 \Leftrightarrow \big||A_{\mathbf{Б}}|\big|^2 = 1.$$

Теорема доказана.

В следующей теореме покажем, что «сохранять» ОНБ есть признак ортогонального оператора.

Теорема 3.2.6 (об ортогональном операторе). *Линейный оператор $\hat{A}$ унитарного (евклидова) пространства U является унитарным (ортогональным) тогда и только тогда, когда он переводит ОНБ в ОНБ.*

Доказательство. *Необходимость.* Если ЛО $\hat{A}$ является ортогональным, то образом ОНБ является ОНБ. Это доказано в пункте 1) теоремы 3.2.5. Докажем обратное.

Достаточность. Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $\mathbf{Б}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ — некоторые ортонормированные базисы ЛП U. Причем $\hat{A}(e_i) = e'_i,\ 1 \le i \le n$. Покажем, что матрица ЛО $\hat{A}$, вычисленная в ОНБ $\mathbf{Б}\ : A_{\mathbf{Б}}$, является унитарной (ортогональной) и тогда, по пункту 2) теоремы 3.2.5, сделаем заключение об унитарности (ортогональнсти) и оператора $\hat{A}$.

Итак, по определению матрицы оператора в базисе $\mathbf{Б}$, имеем

$$A_{\mathbf{Б}} = ([\hat{A}(e_1)]_{\mathbf{Б}} \dots [\hat{A}(e_n)]_{\mathbf{Б}}) = ([e'_1]_{\mathbf{Б}} \dots [e'_n]_{\mathbf{Б}}) \Rightarrow \overline{A}_{\mathbf{Б}}^{t} = \begin{pmatrix} \overline{[e'_1]}_{\mathbf{Б}}^{t} \\ \dots \\ \overline{[e'_n]}_{\mathbf{Б}}^{t} \end{pmatrix}.$$

Строками $\overline{[e'_i]}_{\mathbf{Б}}^{t}$ матрицы $\overline{A}_{\mathbf{Б}}^{t}$ являются сопряженные столбцы $[e'_i]_{\mathbf{Б}}$ матрицы $A_{\mathbf{Б}}$. Перемножим матрицы по правилу «$i-$я строка на $j-$й столбец»:

$$\overline{A}_{\mathbf{Б}}^{t} A_{\mathbf{Б}} = (b_{ij}),\ b_{ij} = \overline{[e'_i]}_{\mathbf{Б}}^{t} \cdot [e'_j]_{\mathbf{Б}} = [e'_j]_{\mathbf{Б}}^{t} \underbrace{\Gamma_{\mathbf{Б}}}_{=E} \overline{[e'_i]}_{\mathbf{Б}} = (e'_j, e'_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \ne j \end{cases}.$$

Здесь использовано то, что $\mathbf{Б}$ — ОНБ, поэтому $\Gamma_{\mathbf{Б}} = E$ и произведение строки на столбец дает формулу скалярного произведения (e'_j, e'_i). Кроме того, $\mathbf{Б}'$ —

ОНБ, поэтому $(e'_j, e'_i) = \delta_{ji}$. Таким образом, получено

$$\overline{A}^t_{\mathbf{Б}} A_{\mathbf{Б}} = (b_{ij} = \delta_{ji} = \delta_{ij}) = E \;\Rightarrow\; \overline{A}^t_{\mathbf{Б}} = A^{-1}_{\mathbf{Б}},$$

что и требовалось доказать.

В следующем следствии сформулированы свойства ортогональных (унитарных) матриц, которые вытекают из доказанных свойств соответствующих ЛО.

Следствие. 1. Матрица перехода из ОНБ в ОНБ ортогональна (унитарна).

2. Определитель ортогональной (унитарной) матрицы равен по модулю 1.

Замечание (о геометрическом свойстве ортогонального оператора). Ортогональный оператор $\hat{A}$ геометрического пространства V^2 есть поворот на угол α вокруг начала координат, если определитель $|A_{\mathbf{Б}}| = +1$. Соответственно, если $|A_{\mathbf{Б}}| = -1$, то $\hat{A}$ есть симметрия относительно оси. Отсюда можно получить, что произведение двух осевых симметрий есть поворот, а произведение поворота на симметрию есть поворот на другой угол. Ортогональный оператор $\hat{A}$ геометрического пространства V^3 можно интерпретировать как вращение вокруг оси или симметрию относительно плоскости или как их произведения.

Теория линейных операторов в пространствах со скалярным произведением работает в различных приложениях линейной алгебры. В частности, полученные теоремы для самосопряженных и ортогональных операторов, переформулированные в матричной форме, будем применять в дальнейшем для построения квадрик. В следующей теореме используется стандартное обозначение диагональной матрицы через перечисление элементов, стоящих на главной диагонали: $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Теорема 3.2.7 (матричная форма теоремы о самосопряженном ЛО). *Если A — действительная симметрическая матрица ($A^t = A$), тогда существует ортогональная матрица S ($S^{-1} = S^t$) такая, что*

$$S^{-1}AS = S^tAS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим евклидово пространство, возьмем в нем ОНБ **Б** и рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$, имеющий в базисе **Б** матрицу A: $A_{\mathbf{Б}} = A$. Тогда $\hat{A}$ — самосопряженный (симметрический) оператор (теорема 3.2.3, пункт 3). По теореме о самосопряженном операторе 3.2.4 найдется ОНБ **В** из собственных векторов оператора $\hat{A}$, отвечающих действительным собственным значениям. Обозначим через T матрицу перехода из **Б** в базис **В**. По следствию из теоремы 3.2.6, матрица T является ортогональной и, кроме того, $T^{-1}AT$ является матрицей оператора в базисе из собственных векторов, то есть диагональной действительной матрицей. Теорема доказана.

3.3. Числовые функции на ЛП

В этом разделе рассмотрим линейные пространства U над полем $\mathbb{R}$. Однако построенная здесь теория обобщается и на комплексные пространства. Числовые функции на ЛП U — это произвольные функции из U в $\mathbb{R}$.

3.3.1. *Линейные формы*

Среди всех числовых функций на ЛП U над полем $\mathbb{R}$ выделим линейные.

Определение 3.3.1. *Функция $F(x)$ из ЛП U над полем $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ называется* **линейной формой**, *если она удовлетворяет свойствам линейности:*

$$\begin{array}{l} 1)\ \forall x, y \in U \quad F(x+y) = F(x) + F(y); \\ 2)\ \forall x \in U,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad F(\lambda x) = \lambda F(x). \end{array}$$

Очевидно, что определение можно записать в эквивалентной форме:

$$\forall x, y \in U,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y).$$

Пример 3.3.1 (линейные формы).

1. На ЛП $\mathbb{R}^3$ зададим функцию $F(x) : \mathbb{R}^3 \ \to\ \mathbb{R}$, где

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad F(x) = x_1^2 + x_2 - 3x_1x_2.$$

Поскольку $F(\lambda x) = \lambda x_1^2 + \lambda x_2 - 3\lambda x_1 \lambda x_2 \neq \lambda F(x)$, $F(x)$ не является линейной формой.

2. На пространстве $C_{[a,b]}$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ зададим функцию $F(f(x)) : C_{[a,b]} \ \to\ \mathbb{R}$, где

$$\forall f(x) \in C_{[a,b]} \quad F(f(x)) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Поскольку

$$F(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx =$$

$$= \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx + \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx = \lambda F(f(x)) + \mu F(g(x)),$$

$F(f(x))$ является линейной формой.

3. На геометрическом ЛП V^3 зададим функцию $F_{\vec{a}}(\vec{x}) : V^3 \to \mathbb{R}$ через скалярное произведение на фиксированный вектор $\vec{a}$:

$$\forall \vec{x} \in V^3 \;\; F_{\vec{a}}(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}).$$

Поскольку

$$F(\lambda\vec{x}) = (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{a}) = \lambda(\vec{x}, \vec{a}) + \mu(\vec{y}, \vec{a}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y}),$$

$F(\vec{x})$ является линейной формой.

Теперь перейдем к вычислению линейной формы в координатах.

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис ЛП U и $F(x)$ — линейная форма на U. Тогда

$$\forall x \in U \;\; x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \mathbf{e} \cdot [x]_{\mathbf{Б}} \;\; \Rightarrow \;\; F(x) = x_1 F(e_1) + \ldots + x_n F(e_n).$$

Обозначим $a_i = F(e_i),\ 1 \le i \le n$, тогда $F(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ — *координатная форма записи.*

Определение 3.3.2. *Если $F(x)$ — линейная форма на ЛП U над полем $\mathbb{R}$, то* **координаты (коэффициенты) линейной формы** *в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ есть набор чисел $a_i = F(e_i),\ 1 \le i \le n$. Обозначение:* $\begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = [F]_{\mathbf{Б}}$.

Используя введенные матричные обозначения, получим

$$F(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = [x]^t_{\mathbf{Б}} \, [F]_{\mathbf{Б}} . \tag{3.14}$$

Для любых базисов $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б}'$ будем иметь

$$F(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \, [F]_{\mathbf{Б}} = [x]^t_{\mathbf{Б}'} \, [F]_{\mathbf{Б}'} .$$

Используя связь координат вектора в разных базисах (формула (1.7)), получим матричное равенство

$$[x]^t_{\mathbf{Б}} \, [F]_{\mathbf{Б}} = \left(T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} \, [x]_{\mathbf{Б}'} \right)^t [F]_{\mathbf{Б}} = [x]^t_{\mathbf{Б}'} \, T^t_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} \, [F]_{\mathbf{Б}} = [x]^t_{\mathbf{Б}'} \, [F]_{\mathbf{Б}'} ,$$

верное для любого x. Поэтому получена формула, связывающая координаты линейной формы в разных базисах:

$$[F]_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} \, [F]_{\mathbf{Б}} . \tag{3.15}$$

3.3.2. *Билинейные формы*

Среди всех числовых функций двух переменных на данном ЛП выделим линейные по обоим аргументам.

Определение 3.3.3. *Функция двух переменных $b(x, y)$ из ЛП U над полем $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ называется* **билинейной формой**, *если она удовлетворяет свойствам линейности как по первому, так и по второму аргументам:*

$$\begin{array}{lll} 1)\ \forall x, y, z \in U & b(x+y, z) = b(x, z) + b(y, z); & b(x, y+z) = b(x, y) + b(x, z); \\ 2)\ \forall x, y \in U,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} & b(\lambda x, y) = \lambda b(x, y); & b(x, \lambda y) = \lambda b(x, y). \end{array}$$

Эквивалентная формулировка:

$$\forall x, y, z \in U,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} 1)\ b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda b(x, z) + \mu b(y, z); \\ 2)\ b(x, \lambda y + \mu z) = \lambda b(x, y) + \mu b(x, z). \end{array}$$

Пример 3.3.2 (билинейные формы).

1. На ЛП $\mathbb{R}^3$ зададим функцию двух переменных $F(x, y) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, где

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad F(x) = x_1 y_2 + x_2 y_2 - 3x_3 y_2.$$

Легко проверяется, что функция линейна по обоим аргументам и является билинейной формой. Заметим, однако, что $F(x, y) \neq F(y, x)$.

2. На пространстве $C_{[a,b]}$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, зададим функцию двух переменных $F(f(x), g(x)) : C_{[a,b]} \to \mathbb{R}$, где

$$\forall f(x), g(x) \in C_{[a,b]} \quad F(f(x), g(x)) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x)^2 \, dx.$$

Данная функция линейна по первому аргументу, но нелинейна по второму, поэтому $F(f(x), g(x))$ не является билинейной формой.

3. На геометрическом ЛП V^3 зададим функцию $F(\vec{x}, \vec{y}) : V^3 \to \mathbb{R}$ через скалярное произведение:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3 \quad F(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

В силу линейности скалярного произведения евклидова пространства по обоим аргументам оно является билинейной формой.

Рассмотрим вычисление билинейной формы в координатах.

Пусть $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис ЛП U и $b(x, y)$ — билинейная форма на U. Тогда

$$\forall x, y \in U \; \begin{cases} x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = \mathbf{e} \cdot [x]_{\mathbf{Б}} \\ y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n = \mathbf{e} \cdot [y]_{\mathbf{Б}} \end{cases};$$

$$b(x, y) = x_1y_1b(e_1, e_1) + x_1y_2b(e_1, e_2) + \ldots + x_ny_nb(e_n, e_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} x_iy_jb(e_i, e_j).$$

Обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j),\ 1 \le i, j \le n$, тогда $b(x, y) = \sum\limits_{1 \le i,j \le n} x_iy_jb_{ij}$ — *координатная форма записи.*

Определение 3.3.4. *Если $b(x, y)$ — билинейная форма на ЛП U над полем $\mathbb{R}$, то* **матрица (коэффициенты) билинейной формы** *в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ есть матрица значений формы на всех парах базисных векторов: $B_{\mathbf{Б}} = (b(e_i, e_j))$.*

Используя матричные обозначения, получим

$$b(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\, B_{\mathbf{Б}}\, [y]_{\mathbf{Б}} = \sum_{1 \le i,j \le n} x_iy_jb(e_i, e_j). \tag{3.16}$$

Для любых базисов $\mathbf{Б}$ и $\mathbf{Б}'$ будем иметь

$$b(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\, B_{\mathbf{Б}}\, [y]_{\mathbf{Б}} = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\, B_{\mathbf{Б}'}\, [y]_{\mathbf{Б}'}\,.$$

Используя связь координат вектора в разных базисах (формула (1.7)), получим матричное равенство

$$[x]^t_{\mathbf{Б}}\, B_{\mathbf{Б}}\, [y]_{\mathbf{Б}} = \left(T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\, [x]_{\mathbf{Б}'}\right)^t B_{\mathbf{Б}} \left(T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\, [y]_{\mathbf{Б}'}\right) =$$

$$= [x]^t_{\mathbf{Б}'} \left(T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} B_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\right) [y]_{\mathbf{Б}'} = [x]^t_{\mathbf{Б}'}\, B_{\mathbf{Б}'}\, [y]_{\mathbf{Б}'}\,,$$

верное для любых x, y. Поэтому получена формула, связывающая координаты билинейной формы в разных базисах:

$$B_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} B_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\,. \tag{3.17}$$

Далее рассмотрим специальный класс билинейных форм.

Определение 3.3.5. *Функция двух переменных $b(x, y)$ из ЛП U над полем $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ называется* **симметричной билинейной формой***, если эта билинейная форма, удовлетворяющая условию*

$$\forall x, y \in U,\ b(x, y) = b(y, x).$$

Теорема 3.3.1 (о матрице симметричной билинейной формы). *Билинейная форма $b(x, y)$ на действительном ЛП является симметричной тогда и только тогда, когда ее матрица в любом базисе симметрична.*

Доказательство. Действительно, по определению матрицы билинейной формы $B_{\mathbf{Б}} = (b_{ij} = b(e_i, e_j))$ в базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и в силу коммутативности скалярного произведения, имеем

$$b_{ij} = b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i) = b_{ji} \iff B^t_{\mathbf{Б}} = B_{\mathbf{Б}}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Скалярное произведение в любом евклидовом пространстве является симметричной билинейной формой.

3.3.3. *Квадратичные формы*

Определение 3.3.6. Квадратичной формой *на действительном ЛП называется такая функция $k(x) : U \mapsto \mathbb{R}$, для которой найдется симметричная билинейная форма $b(x, y)$ такая, что*

$$\forall x \in U \;\; k(x) = b(x, x).$$

Говорят, что билинейная симметричная форма $b(x, y)$ **порождает** *квадратичную $k(x)$.*

Определение 3.3.7. Матрицей квадратичной формы $K_{\mathbf{Б}} = (k_{ij})$ *в базисе* $\mathbf{Б} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *называется матрица $B_{\mathbf{Б}}$ порождающей билинейной формы*

$$K_{\mathbf{Б}} = B_{\mathbf{Б}} = (b(e_i, e_j) = k_{ij}), \;\; 1 \leq i, j \leq n.$$

В силу определения, в любом базисе матрица $K_{\mathbf{Б}} = (k_{ij})$ квадратичной формы симметрична и закон преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса тот же, что и для порождающей билинейной формы

$$K^t_{\mathbf{Б}} = K_{\mathbf{Б}}, \quad K_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} K_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'}. \tag{3.18}$$

Также из координатной формы записи билинейной формы, получим координатную форму записи квадратичной формы

$$k(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}} \, K_{\mathbf{Б}} \, [x]_{\mathbf{Б}} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} k_{ij} x_i x_j = \sum_{1 \leq i \leq n} k_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} k_{ij} x_i x_j.$$

Определение 3.3.8. *Если матрица квадратичной формы $k(x)$ диагональна в базисе* **Б**, *то будем говорить, что в* **Б** *квадратичная форма имеет* **канонический вид.** *Соответствующая координатная форма записи*

$$k(x) = \sum_{1 \le i \le n} k_{ii} x_i^2 = k_{11} x_1^2 + k_{22} x_2^2 + \ldots + k_{nn} x_n^2$$

также называется каноническим видом квадратичной формы.

Пример 3.3.3 (метод Лагранжа). Пусть в некотором базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\}$ линейного пространства U имеем

$$k(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\, K_{\mathbf{Б}}\, [x]_{\mathbf{Б}} = 4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 + 5x_3^2.$$

Тогда

$$K_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 12 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

приведем $k(x)$ к каноническому виду методом Лагранжа (выделения полных квадратов). Для этого перепишем координатную запись в виде

$$k(x) = 4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 = 4(x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2) - 36x_2^2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 =$$
$$= 4(x_1 + 3x_2)^2 - 25x_2^2 + 5x_3^2.$$

Сделаем переход в новый базис $\mathbf{Б}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, в котором

$$[x]_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{\mathbf{Б}' \to \mathbf{Б}} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{\mathbf{Б} \to \mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в базисе $\mathbf{Б}' = \{e'_1 = e_1, e'_2 = -3e_1 + e_2, e'_3 = e_3\}$ квадратичная форма имеет канонический вид: $k(x) = 4x_1'^2 - 25x_2'^2 + 5x_3'^2$. При этом имеют место равенства:

$$k(x) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 12 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 =$$
$$= (x'_1\ x'_2\ x'_3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = 4x_1'^2 - 25x_2'^2 + 5x_3'^2,$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 12 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В следующей теореме рассматривается еще один способ приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Теорема 3.3.2 (об ортогональном преобразовании квадр. формы). *Пусть $k(x)$ — квадратичная форма, имеющая в базисе* $\mathbf{Б}$ *матрицу $K_{\mathbf{Б}}$. Тогда существует такой базис $\mathbf{Б}'$, что,*

1) $K_{\mathbf{Б}'}$ диагональна (то есть в базисе $\mathbf{Б}'$ квадратичная форма $k(x)$ имеет канонический вид);

2) на диагонали $K_{\mathbf{Б}'}$ стоят в точности все собственные значения матрицы $K_{\mathbf{Б}}$ (с учетом кратности);

3) матрица перехода $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ ортогональна, т.е.

$$K_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} K_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} K_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Доказательство. Матрица $K_{\mathbf{Б}}$ квадратичной формы — симметричная, тогда согласно матричной форме теоремы о самосопряженном операторе (теорема 3.2.7), существует такая ортогональная матрица T, что $T^{-1}K_{\mathbf{Б}}T = T^tK_{\mathbf{Б}}T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица и $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — спектр матрицы $K_{\mathbf{Б}}$. Базис, в который матрица T переводит базис $\mathbf{Б}$, является искомым и $T = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$. Теорема доказана.

Пример 3.3.4 (метод ортогонального преобразования). Пусть в некотором базисе $\mathbf{Б} = \{e_1, e_2, e_3\}$ линейного пространства U имеем

$$k(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\, K_{\mathbf{Б}}\, [x]_{\mathbf{Б}} = 4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 + 5x_3^2.$$

Тогда

$$K_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 12 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Приведем $k(x)$ к каноническому виду методом ортогонального преобразования. В силу приведенной теоремы 3.3.2, для записи канонического вида достаточно найти собственные значения матрицы $K_{\mathbf{Б}}$:

$$\left|K_{\mathbf{Б}} - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 & 0 \\ 12 & 11-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(5+\lambda)(\lambda-20).$$

Таким образом, спектр матрицы $K_{\mathbf{Б}}$ состоит из собственных чисел: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 20$. Тогда в соответствующем базисе $\mathbf{Б}''$ из собственных векторов квадратичная форма имеет канонический вид

$$k(x) = 5x_1''^2 - 5x_2''^2 + 20x_3''^2.$$

Замечание. 1. Для записи канонического вида квадратичной формы нет необходимости находить базис из собственных векторов (т.е. ортогональную матрицу $T = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$). Достаточно лишь утверждения теоремы о существовании такого базиса.

2. Только в ортогональном базисе из собственных векторов матрица канонического вида квадратичной формы на диагонали имеет собственные значения. Но диагональный вид может иметь матрица квадратичной формы и в базисе, не состоящем из собственных векторов. В этом случае ее коэффициенты не обязаны быть собственными числами матрицы $K_{\mathbf{Б}}$.

В рассмотренных выше примерах одна квадратичная форма в разных базисах была записана тремя способами:

$$k(x) = 4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 = 4x_1'^2 - 25x_2'^2 + 5x_3'^2 = 5x_1''^2 - 5x_2''^2 + 20x_3''^2.$$

Как видно, все коэффициенты различны, постоянно лишь количество положительных и отрицательных коэффициентов. Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 3.3.3 (закон инерции квадратичных форм). *Число положительных и отрицательных слагаемых в каноническом виде квадратичной формы постоянно и не зависит от способа приведения ее к каноническому виду.*

Определение 3.3.9. *Квадратичная форма $k(x) : U \mapsto \mathbb{R}$ называется* **положительно (отрицательно) определенной***, если*

$$\forall x \in U,\ x \neq \Theta \ \Rightarrow\ k(x) > 0 \ \ (k(x) < 0).$$

Примером положительно определенной квадратичной формой в евклидовом пространстве является функция $k(x) = (x, x)$ — скалярный квадрат вектора. Из курса математического анализа известно, что дифференциал второго порядка в окрестности точки минимума также есть положительно определенная квадратичная форма.

Определение 3.3.10. Главными минорами *квадратной матрицы A называются миноры, построенные на первых k строках и столбцах матрицы A,* *где* $1 \le k \le n$. *Для матрицы* $A = (a_{ij}), 1 \le i, j \le n$ *обозначим*

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема 3.3.4 (критерий Сильвестра).
1) Квадратичная форма $k(x) : U \mapsto \mathbb{R}$ *является положительно определенной тогда и только тогда, когда в любом (эквивалентно – в некотором) базисе* **Б** *все главные миноры матрицы* $K_{\text{Б}}$ *этой квадратичной формы положительны:*

$$\forall x \in U\ k(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

2) Квадратичная форма $k(x) : U \mapsto \mathbb{R}$ *является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда в любом (эквивалентно – в некотором) базисе* **Б** *знаки главных миноров матрицы* $K_{\text{Б}}$ *этой квадратичной формы чередуются:*

$$\forall x \in U\ k(x) < 0 \ \Leftrightarrow\ \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n = (-1)^n |\Delta_n|.$$

3.3.4. *Исследование квадрик*

Пусть на евклидовом пространств U $k(x)$ — квадратичная форма, $F(x)$ — линейная форма, c — число. Тогда уравнение вида

$k(x) + F(x) + c = 0$ – **уравнение поверхности второго порядка.**

Для геометрических пространств V^2, V^3 имеется классификация квадрик (линий и поверхностей второго порядка), проведенная в канонических системах координат. Система координат является канонической для квадрики, если она декартова и ее начало совпадает с центром симметрии (для центральных квадрик), а оси совпадают с осями симметрии квадрики.

Теория линейных операторов, примененная в матричном виде для линейных и квадратичных форм, позволяет находить канонические системы координат для линий и поверхностей второго порядка. Далее приведем план нахождения канонической системы координат квадрики по ее уравнению в произвольной декартовой системе координат.

Нахождение канонической системы координат квадрики

1. Привести квадратичную форму $k(x)$ к каноническому виду ортогональным преобразованием (теорема 3.3.2):

а) для матрицы $K_{\text{Б}}$ вычислить собственные значения λ_i, как корни характеристического уравнения: $|K_{\text{Б}} - \lambda E| = 0$;

б) найти базис $\mathbf{Б}'$ из собственных векторов;

в) ортогонализировать (процесс Грама-Шмидта формула (3.5) на с. 74) и нормировать, если необходимо, базис $\mathbf{Б}'$, получив ОНБ $\mathbf{Б}''$;

г) записать матрицу перехода $T = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}''}$.

Результат: $K_{\mathbf{Б}''} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, квадрика приведена к главным осям — направлениям ОНБ $\mathbf{Б}''$.

2. Перейти в новый базис $\mathbf{Б}''$ для линейной формы $F(x)$ (см. формулу 3.15): $[F]_{\mathbf{Б}''} = T^t \cdot [F_{\mathbf{Б}}]$.

3. Записать уравнение квадрики в базисе $\mathbf{Б}''$:

$$[x]^t_{\mathbf{Б}''} \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)[x]_{\mathbf{Б}''} + [F]_{\mathbf{Б}''}[x]_{\mathbf{Б}''} + c = 0.$$

4. Если необходимо, сделать параллельный перенос системы координат, выделив полные квадраты.

Пример 3.3.5 (построение кривой второго порядка). Построить кривую, заданную в декартовой системе координат xOy уравнением

$$5x^2 - 30y^2 - 120xy - 250x + 121 = 0.$$

Выделим в уравнении квадратичную, линейную формы и свободный член (форма нулевого порядка):

$$\underbrace{5x^2 - 30y^2 - 120xy}_{\substack{\text{квадратичная}\\ \text{форма } k(\vec{x})}} \quad \underbrace{-250x}_{\substack{\text{линейная}\\ \text{форма } F(\vec{x})}} \quad +121 = 0.$$

Реализуем план нахождения канонической системы координат.

1. Приведем квадратичную форму к каноническому виду. Запишем ее матрицу в ОНБ $\mathbf{Б} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$, который определен осями заданной системы xOy : $K_{\mathbf{Б}} = \begin{pmatrix} 5 & -60 \\ -60 & -30 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные векторы и собственные значения матрицы $K_{\mathbf{Б}}$. Для этого, в первую очередь, составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -60 \\ -60 & -30-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 25\lambda - 3750 = (\lambda + 75)(\lambda - 50).$$

Таким образом, имеем два собственных числа: $\lambda_1 = -75,\ \lambda_2 = 50$.
Далее найдем собственные векторы $\vec{b}_{\lambda_1} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, отвечающие собственному значению $\lambda_1 = -75$, как решение ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & -60 \\ -60 & -30-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразуя матрицу ОСЛУ, получаем:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & -60 \\ -60 & -30-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & -60 \\ -60 & 45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\vec{b}_{\lambda_1} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Также найдем собственные векторы $\vec{b}_{\lambda_2} = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$, отвечающие собственному значению $\lambda_2 = 50$:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & -60 \\ -60 & -30-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -60 \\ -60 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\vec{b}_{\lambda_2} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$. По свойствам собственных векторов симметричной матрицы (теорема 3.2.3) векторы $\vec{b}_{\lambda_1},\ \vec{b}_{\lambda_2}$ образуют ортогональную систему. Далее нормируем эти векторы и получим ОНБ из собственных векторов:

$$\mathbf{Б}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \quad \vec{e}_1 = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j},\ \vec{e}_2 = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \Rightarrow K_{\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} -75 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, переходим в новую декартову систему координат $x'Oy'$, оси которой направлены вдоль собственных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. По матрице перехода из базиса $\mathbf{Б}$ в базис $\mathbf{Б}'$ можно записать формулы связи координат, которые обеспечивают канонический вид квадратичной формы $k(\vec{x})$:

$$T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases} \Rightarrow k(\vec{x}) = -75(x')^2 + 50(y')^2.$$

2. Найдем координаты линейной формы в новом базисе:

$$[F]_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [F_{\mathbf{Б}}] = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -250 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 200 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\vec{x}) = -150x' + 200y'.$$

Запишем уравнение квадрики в новой системе координат:

$$-75(x')^2 + 50(y')^2 - 150x' + 200y' + 121 = 0.$$

3. Поскольку обе переменные содержатся в уравнении как в первой, так и во второй степени, необходимо выделить полный квадрат:

$$-75(x'+1)^2 + 50(y'+2)^2 - 4 = 0.$$

Центр симметрии гиперболы точка $O'(-1,-2)$, координаты которой вычислены в системе $x'Oy'$. Чтобы правильно ее нанести на плоскость, вычислим координаты O' в системе xOy:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' = \frac{3}{5}(-1) - \frac{4}{5}(-2) = 1 \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = \frac{4}{5}(-1) + \frac{3}{5}(-2) = -2. \end{cases}$$

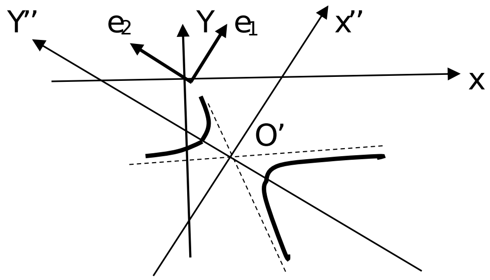

Рис. 3.1. Построение гиперболы в каноническом базисе

Перенесем начало координат в новую точку $O'(\underbrace{-1}_{x'}, \underbrace{-2}_{y'})$ $(O'(\underbrace{1}_{x}, \underbrace{-2}_{y}))$:

$$\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' + 2 \end{cases} \Rightarrow\ -75(x'')^2 + 50(y'')^2 - 4 = 0,$$

$-\dfrac{75}{4}(x'')^2 + \dfrac{50}{4}(y'')^2 = 1$ – каноническое уравнение гиперболы (рис. 3.1).

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определения евклидова и унитарного пространств. Чем отличаются скалярные произведения в этих пространствах?

2. Как применяется неравенство Коши – Буняковского для определения угла между векторами?

3. Сформулируйте определения ортогональных и ортонормированных систем векторов. Приведите формулы Грама – Шмидта.

4. Сформулируйте определение матрицы Грама, приведите формулу вычисления скалярного произведения в евклидовом и унитарном пространствах.

5. Сформулируйте определение сопряженного оператора, приведите формулу вычисления матрицы сопряженного оператора в евклидовом и унитарном пространствах.

6. Сформулируйте определения самосопряженного и эрмитова операторов, приведите формулу вычисления матрицы этих оператора в евклидовом и унитарном пространствах.

7. Сформулируйте определения ортогонального и унитарного операторов, приведите формулу вычисления матрицы этих оператора в евклидовом и унитарном пространствах.

8. Сформулируйте теорему о самосопряженном операторе и ее матричный аналог.

9. Сформулируйте определение линейной формы, приведите формулу для вычисления ее координат в разных базисах.

10. Сформулируйте определение билинейной формы, приведите формулу для вычисления ее координат в разных базисах.

11. Сформулируйте определение квадратичной формы, приведите формулу для вычисления ее координат в разных базисах. Сформулируйте критерий Сильвестра и закон инерции квадратичных форм.

12. Опишите план приведения квадрики к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования декартовой системы координат.

Библиографический список

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 448 с. – ISBN 978-5-8114-1844-2.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2011. – 608 с. – ISBN 978-5-8112-4351-8.

3. Вся высшая математика. Том 1: Аналитическая геометрия, линейная алгебра, введение в анализ, дифференциальное исчисление / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. – Москва: URSS, 2020. – 336 с. – ISBN 978-5-9710-7567-7.

4. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – Москва: Астрель, 2003. – 654 с.– ISBN 5-271-01318-9.

5. Краснов, М. Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 176 с. – ISBN 5-354-00383-0.

6. Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклемишева, И. А. Чубаров , А. Ю. Петрович. – Москва: Физматлит, 2004. – 496 с. – ISBN 5-9221-0010-6.

7. Сборник задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / под общ. ред. А. В. Ефимова и Ф. С. Поспелова.– 3-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2004. – 430 с. – ISBN 978-5-91872-051-6.

8. Зенков, А. В. Линейная алгебра и тензорное исчисление: учеб. пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010. – 96 с. – ISBN 5-321-19662-3.

9. Зенков, А. В. Линейная алгебра с приложениями: руководство к решению задач / А. В. Зенков. – Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. – 67 с. – ISBN 5-321-02302-X.

10. Зенков, А. В. Системы дифференциальных уравнений и элементы теории устойчивости: учеб. пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010 – 54 с. – ISBN 5-321-00314-6.

11. Мельников, Ю. Б. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] / Ю. Б. Мельников. – 4-е изд., испр. и доп. – Екатеринбург: Изд-во УрГЭУ, 2010.– URL: http://lib.usue.ru/resource/free/12/MelnikovAlgebra4/index.html (дата обращения: 29.08.2020).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матричные формулы преобразования координат

$\mathbf{Б} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbf{Б}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ — базисы, $T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} = \big([e'_1]_{\mathbf{Б}} \dots [e'_n]_{\mathbf{Б}}\big)$

Объект	Определение координат объекта и его координатная запись	Преобразование координат объекта
Вектор x	$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = \mathbf{e}[x]_{\mathbf{Б}}$	$[x]_{\mathbf{Б}} = T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [x]_{\mathbf{Б}'}$
Линейный оператор $\hat{A}$ $\hat{A}(x)$	$A_{\mathbf{Б}} = \Big([\hat{A}(e_1)]_{\mathbf{Б}} \dots [\hat{A}(e_n)]_{\mathbf{Б}}\Big)$ $[\hat{A}(x)]_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}}[x]_{\mathbf{Б}}$	$A_{\mathbf{Б}'} = T^{-1}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} A_{\mathbf{Б}} T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$
Скалярное произведение (x, y) над $\mathbb{R}$ (x, y) над $\mathbb{C}$	$\Gamma_{\mathbf{Б}} = ((e_i, e_j))$ $(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}[y]_{\mathbf{Б}}$ $\Gamma^t_{\mathbf{Б}} = \Gamma_{\mathbf{Б}}$ $(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{[y]_{\mathbf{Б}}}$ $\Gamma^t_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma_{\mathbf{Б}}}$	$\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$ $\Gamma_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}\Gamma_{\mathbf{Б}}\overline{T}_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$
Линейная форма F $F(x)$	$[F]_{\mathbf{Б}} = (F(e_i))$ $F(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}}[F]_{\mathbf{Б}}$	$[F]_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'} \cdot [F]_{\mathbf{Б}}$
Билинейная форма b $b(x, y)$	$B_{\mathbf{Б}} = (b(e_i, e_j))$ $b(x, y) = [x]^t_{\mathbf{Б}}B_{\mathbf{Б}}[y]_{\mathbf{Б}}$	$B_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}B_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$
Квадратичная форма k $k(x)$	$K_{\mathbf{Б}} = (b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i))$ $k(x) = [x]^t_{\mathbf{Б}}K_{\mathbf{Б}}[x]_{\mathbf{Б}}$	$K_{\mathbf{Б}'} = T^t_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}K_{\mathbf{Б}}T_{\mathbf{Б}\to\mathbf{Б}'}$

Сопряженный оператор $\forall x, y \in U \quad \Big(\hat{A}(x), y\Big) = \Big(x, \hat{A}^*(y)\Big)$

Матрица сопряженного оператора $A^*_{\mathbf{Б}} = \overline{\Gamma^{-1}_{\mathbf{Б}} A^t_{\mathbf{Б}} \Gamma_{\mathbf{Б}}}$

Нормальные операторы $\hat{A}^* \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot \hat{A}^*$

ЛП	$\hat{A}^* = \hat{A}$		$\hat{A}^* = \hat{A}^{-1}$	
	ЛО	матрица в ОНБ	ЛО	матрица в ОНБ
унитарное над $\mathbb{C}$	эрмитов	$\overline{A^t_{\mathbf{Б}}} = A_{\mathbf{Б}}$ эрмитова	унитарный	$\overline{A^t_{\mathbf{Б}}} = A^{-1}_{\mathbf{Б}}$ унитарная
евклидово над $\mathbb{R}$	симметричный	$A^t_{\mathbf{Б}} = A_{\mathbf{Б}}$ симметричная	ортогональный	$A^t_{\mathbf{Б}} = A^{-1}_{\mathbf{Б}}$ ортогональная

Оглавление

Учебное издание

Голикова Елена Александровна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Редактор *О. С. Смирнова*[*]
Верстка *LaTeX Е. А. Голиковой*

[*] Примечание редакции: правка редактора не внесена в текст издания полностью в связи с особенностями работы в программе *LaTeX*.

Издательство не несет ответственности за оформление издания.

Подписано в печать 03.03.2021. Формат 70×100 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 8,4.
Уч.-изд. л. 5,7. Тираж 30 экз. Заказ 35.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2020

9 785799 631932